Prof. Dr. W. Assenmacher
Statistik und Ökonometrie

Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

Induktive Statistik

Formelsammlung

Stichprobenraum: $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2, \ldots, \omega_m\}$

Vollständiges System von Ereignissen $\{A_1, \ldots, A_n\}$:

A_j: Ereignis eines Zufallsvorgangs, $j = 1, \ldots n$.

(1) $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$

(2) $A_i \cap A_j = \emptyset \quad$ für $i \neq j$,

(3) $A_j \neq \emptyset$ für $j = 1, \ldots, n$

Ω: sicheres Ereignis, $\qquad \emptyset$: unmögliches Ereignis.

$\sigma-$ Algebra $\mathcal{A}$:

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$

(2) $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ für alle $A_j \in \mathcal{A}$

(3) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}, \quad \bar{A}:$ zu A komplementäres Ereignis

Messraum: $(\Omega, \mathcal{A})$

Kolmogoroff–Axiome:

(1) $P(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots \qquad$ für alle $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ mit
$A_i \cap A_j = \emptyset$ und $i \neq j$.
$P:$ Wahrscheinlichkeit(smaß)

Wahrscheinlichkeitsraum: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Wahrscheinlichkeitssätze

1. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $A \subset B \ \Rightarrow\ P(A) < P(B)$

4. Additionssätze für paarweise <u>nicht</u> disjunkte Ereignisse

   a) 2 Ereignisse A und B:

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   b) 3 Ereignisse A, B, C:

   $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

5. Additionssätze für endliche und abzählbar unendliche, paarweise disjunkte Ereignisse:

   $$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$$

6. Multiplikationssatz für zwei Ereignisse A und B:

   $$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

   $P(A|B)$ bzw. $P(B|A)$: bedingte Wahrscheinlichkeit.

   Sind A und B stochastisch unabhängig: $P(A|B) = P(A)$, dann gilt

   $$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

7. Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

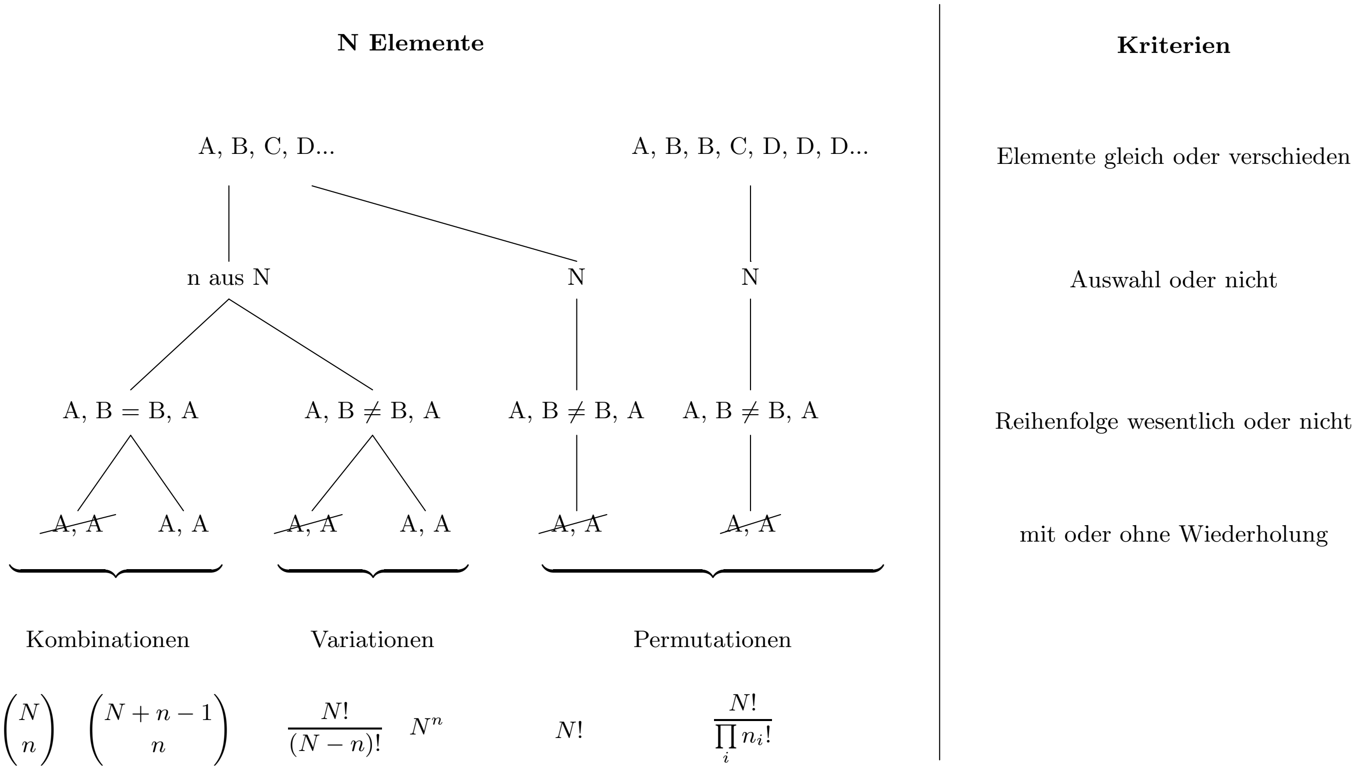
   $A_j, B \in \mathcal{A},\ j = 1, \ldots, n\ ; \{A_j\}$: vollständiges System von Ereignissen

   $$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n) = \sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)$$

8. Bayes'sches Theorem

   $$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}, \qquad \text{für } P(B) > 0 \text{ und } i = 1, \ldots, n.$$

Flussdiagramm zu Kombinatorik



Diskrete Verteilung:

Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) = p_i & \text{, für } i = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Stetige Verteilung:

Dichtefunktion: $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} \qquad x \in \mathbb{R}$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \ \text{ bzw. } \int_{a}^{x} f(u)du \text{ für } a < x$$

Bestimmte Parameter einer Verteilung

1. Erwartungswert $E(X) = \mu$

   a) diskreter Fall: $E(X) = \mu = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$

   b) stetiger Fall: $E(X) = \mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$

2. Varianz $\operatorname{var}(X) = \sigma^2$: $\qquad \operatorname{var}(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - [E(X)]^2$

Lineartransformation $Y = a + bX$

$$E(Y) = a + bE(X) \qquad \operatorname{var}(Y) = b^2 \operatorname{var}(X)$$

Additionssätze für Varianzen

$X_1, \ldots, X_n$: Zufallsvariablen, $Y := \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j X_j$,

a) abhängige Zufallsvariablen:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(Y) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \operatorname{var}(X_j) + 2[\lambda_1\lambda_2 \operatorname{cov}(X_1, X_2) + \lambda_1\lambda_3 \operatorname{cov}(X_1, X_3) + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n \operatorname{cov}(X_{n-1}, X_n)] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \operatorname{var}(X_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \lambda_i \lambda_j \operatorname{cov}(X_i X_j)\end{aligned}$$

b) unabhängige Zufallsvariablen

$$\operatorname{var}(Y) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \operatorname{var}(X_j), \quad \text{da} \ \operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0 \ \text{ für } \ i \neq j.$$

Tschebyscheff'sche Ungleichung

$$P(|X - \mu| > k\sigma) \leq \tfrac{1}{k^2}, \quad k > 1$$
$$P(|X - \mu| \leq k\sigma) > 1 - \tfrac{1}{k^2}, \quad k > 1$$

Spezielle diskrete Verteilungen

1. Zweipunktverteilung

$$f(x) = \begin{cases} p_1 & , x = x_1 \\ p_2 = 1 - p_1 & , x = x_2 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & , x < x_1 \\ p_1 & , x_1 \leq x < x_2 \\ 1 & , x \geq x_2 \end{cases}$$

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 \qquad \operatorname{var}(X) = p_1(1 - p_1)(x_1 - x_2)^2$$

Spezialfall: $x_1 = 1, \ x_2 = 0$ (Bernoulli–Verteilung)

$$E(X) = p_1 \qquad \operatorname{var}(X) = p_1(1 - p_1) = p_1 p_2.$$

2. Gleichverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} & , x = x_i,\ i = 1, \dots, m \\ 0 & , sonst \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & , x < x_1 \\ \dfrac{i}{m} & , x_i \le x < x_{i+1},\ i = 1, \dots, m-1 \\ 1 & , x \ge x_m \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i \qquad \mathrm{var}(X) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \mu^2$$

3. Binomialverteilung B(n,p):

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & , x = 0, 1, 2, \dots, n, \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{[x]} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & , 0 \le x \le n,\ k = 0, 1, \dots [x] \\ 1 & , x > n \end{cases}$$

$E(X) = np \qquad \mathrm{var}(X) = np(1-p) = npq.$

Rekursionsformel: $f(x+1) = \dfrac{n-x}{x+1} \dfrac{p}{1-p} f(x)$

Relativierte Binomialverteilung : $E(\frac{1}{n}X) = p \qquad \mathrm{var}(\frac{1}{n}X) = \dfrac{p\,(1-p)}{n} = \dfrac{p\,q}{n}.$

4. Laplace–Verteilung: $p = (1-p) = 0.5$

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^n & , x \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum\limits_{k=0}^{[x]} \binom{n}{k} & , 0 \le x < n,\ k = 0, 1, \dots, [x] \\ 1 & , x \ge n \end{cases}$$

5. Geometrische Verteilung G(p)

$$f(x) = \begin{cases} p\,(1-p)^x & , x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - q^{[x]+1} & , x \ge 0 \\ 1 & , x = \infty \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}, \qquad \mathrm{var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

6. Negative Binomialverteilung (Pascal–Verteilung) NB(r,p)

$$f(x) = \begin{cases} \binom{x+r-1}{r-1} p^r q^x & , \ x = 0,1,2,\ldots \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ \sum\limits_{k=0}^{[x]} \binom{k+r-1}{r-1} p^r q^k & , \ 0 \le x, \ k = 0,1,\ldots,[x]. \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{r(1-p)}{p} = \frac{rq}{p} \qquad \operatorname{var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2} = \frac{rq}{p^2}$$

Rekursionsformel: $f(x+1) = q\dfrac{x+r}{x+1} f(x)$

7. Poisson–Verteilung PV(λ)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & , \ x = 0,1,2\ldots \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0 \\ e^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k}{k!} & , \ x \ge 0, \quad k = 0,1,\ldots[x]. \end{cases}$$

$$E(X) = \lambda \qquad \operatorname{var}(X) = \lambda \qquad \lambda = np$$

Rekursionsformel: $f(x+1) = \dfrac{\lambda}{x+1} f(x)$

Liegt ein Poissonprozess vor, ist λ vom Intervall $\triangle t$ abhängig. $\lambda(\triangle t)$

8. Hypergeometrische Verteilung H(N,M,n)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} & , \ \max\{0, n+M-N\} \le x \le \min\{n, M\} \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < \max\{0, n+M-N\} = a \\ \frac{\sum\limits_{k=a}^{[x]} \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} & , \ a \le x \le \min\{n, M\}, \ k = a,\ldots,[x] \\ 1 & , \ x > \min\{n, M\} \end{cases}$$

$$E(X) = np \qquad \operatorname{var}(X) = np\,(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

Relativierte hypergeometrische Verteilung: $E(\frac{1}{n}X) = p \qquad \operatorname{var}(\frac{1}{n}X) = \dfrac{p\,(1-p)}{n}\dfrac{N-n}{N-1}$

Spezielle stetige Verteilungen

1. Rechteckverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \; a \le x \le b \\ 0 & , \; \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \; x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , \; a \le x \le b \\ 1 & , \; x > b \end{cases}$$

$$E(X) = \tfrac{1}{2}(a+b) \qquad \text{var}(X) = \tfrac{1}{12}(b-a)^2$$

2. Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \; -\infty < x < \infty$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2\right] du, \; -\infty < x < \infty$$

$$E(X) = \mu \qquad \text{var}(X) = \sigma^2$$

   - Reproduktivität:

     $X_j, \; j = 1, \ldots, n$: stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $N(\mu_j, \sigma_j^2)$
     $Y = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j X_j, \; \lambda_j \in R$, mindestens ein $\lambda_j \neq 0 \Rightarrow Y : N(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j, \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \sigma_j^2)$

   - Lineartransformation:

     $Y = a + bX \quad a, b \neq 0, \quad X : N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y : N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$

   - Standardisierung:

     $Z = a + bX; \quad a = -\frac{\mu}{\sigma}, \quad b = \frac{1}{\sigma}$

3. Standardnormalverteilung $X : N(\mu, \sigma^2), Z : N(0, 1)$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad , \quad -\infty < z < \infty$$

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \quad , \quad -\infty < z < \infty$$

4. Logarithmische Normalverteilung $LN(\mu_L, \sigma_L^2)$

$$X: \text{ stetig, mit } 0 < x < \infty;\ E(X) = \mu,\ \mathrm{var}(x) = \sigma^2$$
$$Y = \ln X,\ -\infty < y < \infty: \ N(\mu_L, \sigma_L^2).$$

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_L\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu_L}{\sigma_L}\right)^2\right], \quad 0 < x < \infty$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_L\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \frac{1}{u} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln u - \mu_L}{\sigma_L}\right)^2\right] du, \quad 0 < x < \infty$$

$$E(X) = e^{(\mu_L + \frac{1}{2}\sigma_L^2)} \quad \mathrm{var}(X) = e^{2\mu_L + \sigma_L^2}(e^{\sigma_L^2} - 1)$$

5. $\chi^2(n)$–Verteilung

$$Z_j: \ j = 1, \ldots, n: \text{ unabhängige, identisch normalverteilte Zufallsvariablen } N(0,1)$$
$$X = \sum_{j=1}^{n} Z_j^2, \quad 0 \le x < \infty: \ \chi^2(n)\text{–verteilt}, \quad n: \text{Freiheitsgrade}$$
$$E(X) = n \quad \mathrm{var}(X) = 2n$$

6. t–Verteilung

$$Z: N(0,1),\ Y: \chi^2(n),\ Z, Y: \text{ stochastisch unabhängig}$$
$$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}: \text{ t–verteilt}$$
$$\text{Für } n \ge 3: \ E(X) = 0 \quad \mathrm{var}(X) = \frac{n}{n-2}$$

7. F–Verteilung

$$X_1: \chi^2(m),\ X_2: \chi^2(n);$$
$$X_1, X_2: \text{ stochastisch unabhängig }; m, n: \text{ Freiheitsgrade}$$

$$X = \frac{\frac{X_1}{m}}{\frac{X_2}{n}}: F(m,n) \text{ –verteilt}$$

$$\frac{1}{X}: F(n,m) \text{ –verteilt}$$

$$E(X) = \frac{n}{n-2} \text{ für } n > 2 \quad \mathrm{var}(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \text{ für } n > 4.$$

Zweidimensionale Verteilungen:

X,Y: diskrete bzw. stetige Zufallsvariablen

$f(x,y)$: gemeinsame Wahrscheinlichkeits– bzw. Dichtefunktion von X und Y mit:

$$\sum_y \sum_x f(x,y) = 1 \text{ (diskret)}, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx dy = 1 \text{ (stetig)}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x,y) = \sum_{v \le y} \sum_{u \le x} f(u,v) \text{ (diskret)}, \quad F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,dudv \text{ (stetig)}$$

Randwahrscheinlichkeits– bzw. Randdichtefunktion für X:

$$f_X(x) = \sum_y f(x,y)\ , \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) : \text{analog zu } f_X(x)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeits– bzw. Dichtefunktion $f(x|y)$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad \text{bzw.} \quad f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

Stochastische Ünabhängigkeit: $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

Kovarianz: $\quad \operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

$$\text{mit } E(YX) = \sum_y \sum_x xyf(x,y) \text{ (diskret)}, \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy \ \text{ (stetig)}$$

Korrelationskoeffizient: $r_{XY} = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)}}$

Zweidimensionale Standardnormalverteilung

$$X, Y : N(0,1) \text{ und stochastisch unabhängig}$$
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]$$
$$F(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right] dudv$$

Gesetze der großen Zahl

$X_i, i = 1, \ldots, n$: unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen.

1. Schwaches Gesetz der großen Zahl

   a) Homograder Fall (nach Bernoulli)

   $$\lim_{n\to\infty} P(|h_n(A) - p| < \varepsilon) = 1 \Longleftrightarrow \operatorname*{plim}_{n\to\infty} h_n(A) = p$$

   b) Heterograder Fall (nach Tschebyscheff)

   $$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}(n) - \mu| < \varepsilon) = 1 \Longleftrightarrow \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \bar{X}(n) = \mu$$

2. Starkes Gesetz der großen Zahl

   $$P(\lim_{n\to\infty} h_n(A) = p) = 1 \text{ bzw. } P(\lim_{n\to\infty} \bar{X}(n) = \mu) = 1$$

Grenzwertsätze

1. Moivre–Laplace

   X: Anzahl der Erfolge bei n unabhängigen Bernoulli–Experimenten

   X_i: unabhängig und identisch Bernoulli–verteilt

   Für $n \to \infty$ (Faustregel $n > \dfrac{9}{p\,(1-p)}$) erhält man als Grenzverteilung:

$$S(n) = \sum X_j \quad \sim N(\,np, np\,(1-p)\,) \quad \text{(binomialverteilt)}$$
$$\bar{X}(n) = \tfrac{1}{n}\sum X_j \quad \sim N\left(p, \frac{p\,(1-p)}{n}\right) \quad \text{(relativiert binomialverteilt)}$$

2. Lindenberg–Lévy

   X_i: unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit μ und σ^2

   Für $n \to \infty$ (Faustregel $n > 30$) erhält man als Grenzverteilung:

$$S(n) = \sum X_j \quad \sim \; N(n\mu, n\sigma^2)$$
$$\bar{X}(n) = \tfrac{1}{n}\sum X_j \quad \sim \; N(\mu, \tfrac{\sigma^2}{n})$$

3. Zentraler Grenzwertsatz von Ljapunoff

   X_j: unabhängige und nicht identisch verteilte Zufallsvariablen mit μ_j und σ_j^2

   Für $n \to \infty$ (Faustregel $n > 30$) erhält man als Grenzverteilung:

$$S(n) = \sum X_j \quad \sim \; N\left(\sum \mu_j, \sum \sigma_j^2\right)$$
$$\bar{X}(n) = \tfrac{1}{n}\sum X_j \quad \sim \; N\left(\tfrac{1}{n}\sum \mu_j, \tfrac{1}{n}\sum \sigma_j^2\right)$$

Einige Stichprobenfunktionen und ihre Verteilungen

$X_i,\ i = 1, \dots n$: unabhängige Stichprobenvariablen aus **einfacher Zufallsstichprobe**;

Fall A: X ist in der Grundgesamtheit normalverteilt

Fall B: X ist nicht normalverteilt, aber $n \geq 30$

1. Merkmalssumme $S(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

   A) $S(n) : N(n\mu, n\sigma^2)$ **B**) $S(n) \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ (wegen Grenzwertsätze)

2. Stichprobenmittelwert $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

   A) $\bar{X} : N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ **B**) $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ (wegen Grenzwertsätze)

3. Stichprobenanteilswert $\bar{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, X in der Grundgesamtheit Bernoulli – verteilt

   – für $n < \dfrac{9}{p\,(1-p)}$: $\bar{P} : RB(n, p)$ (relativiert Binomialverteilt)

   – für $n > \dfrac{9}{p\,(1-p)}$: $\bar{P} \sim N\left(p, \dfrac{p\,(1-p)}{n}\right)$

4. Stichprobenvarianz

   Heterograder Fall

	μ der GG bekannt	μ der GG unbekannt
ZmZ	$S^2 = \frac{1}{n}\,\Sigma\,(X_i - \mu)^2$	$S^2 = \frac{1}{n-1}\,\Sigma\,(X_i - \bar{X})^2$
ZoZ	$S^2 = \frac{N-1}{N}\,\frac{1}{n}\,\Sigma\,(X_i - \mu)^2$	$S^2 = \frac{N-1}{N}\,\frac{1}{n-1}\,\Sigma\,(X_i - \bar{X})^2$

   Homograder Fall

ZmZ	$S^2 = \frac{n}{n-1}\,\bar{P}\,(1 - \bar{P})$
ZoZ	$S^2 = \frac{N-1}{N}\,\frac{n}{n-1}\,\bar{P}\,(1 - \bar{P})$

Mittlerer quadratischer Fehler (mean square error) MSE

$$MSE(\theta) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = \mathrm{var}(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2$$

Schwankungsintervall (GG: $N(\mu, \sigma^2)$ oder $n > 30,\ \sigma$: bekannt)

heterograd: $P(\mu - \sigma_{\bar{X}} z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \bar{X} \leq \mu + \sigma_{\bar{X}} z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

homograd: $P(p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}} \leq \bar{P} \leq p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}) = 1 - \alpha$

Konfidenzintervalle

Konfidenzintervall für μ (Heterograder Fall):

	σ bekannt	σ unbekannt
ZmZ	Fall (1)	Fall (2) mit $\widehat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_j (X_j - \bar{X})^2}$
ZoZ	Fall (3)	Fall (4) mit $\widehat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{N-1}{N}\frac{1}{n-1}\sum_j (X_j - \bar{X})^2}$

(1) $P\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$

(2) $P\left(\bar{X} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$

(3) $P\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1-\alpha$

(4) $P\left(\bar{X} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1-\alpha$

Konfidenzintervall für p (Homograder Fall):

	σ unbekannt
ZmZ	Fall (1) mit $\widehat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{n}{n-1}\bar{P}(1-\bar{P})}$
ZoZ	Fall (2) mit $\widehat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{N-1}{N}\frac{n}{n-1}\bar{P}(1-\bar{P})}$

(1) $P\left(\bar{P} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq p \leq \bar{P} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$

(2) $P\left(\bar{P} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq p \leq \bar{P} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1-\alpha$

Konfidenzintervall für σ^2 (X In der GG (annähernd) normalverteilt, einfache Zufallsstichproben):

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2(1-\frac{\alpha}{2}; n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2(\frac{\alpha}{2}; n-1)}\right] = 1-\alpha$$

mit $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \bar{X})^2$

Notwendiger Stichprobenumfang

e: absoluter Fehler (:= halbe Länge eines Konfidenzintervalls)

heterograd:	ZmZ	$n \geq \left(\frac{z_\alpha \sigma}{e}\right)^2$
	ZoZ	$n \geq \frac{z^2\sigma^2 N}{z^2\sigma^2 + e^2(N-1)}$
homograd:	ZmZ	$n \geq \frac{z_\alpha^2 \bar{P}(1-\bar{P})}{e^2} + 1$
	ZoZ	bei $\frac{n}{N} < 0,05$ wie bei ZmZ

Hochrechnung

$$\text{heterograd: } \hat{s}_X = N\bar{x}, \quad \text{homograd: } \hat{M} = N\bar{P},$$

Einstichproben–Signifikanztests für μ bzw. p: $H_0 : \mu = \mu_0$ bzw. $H_0 : p = p_0$

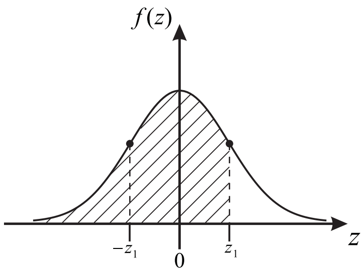
Fall A: X ist in der Grundgesamtheit normalverteilt

Fall B: X ist in der Grundgesamtheit nicht normalverteilt bzw. Verteilung von X unbekannt

	Voraussetzungen	Prüfgröße Z	Stichprobenverteilung
heterograd	σ bekannt mit Zurücklegen	$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$	A) $Z : N(0,1)$ B) $Z \sim N(0,1)$ für $n \geq 30$
	σ unbekannt mit Zurücklegen	$\frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$	A) $Z : t(n-1),\ Z \sim N(0,1)$ für $n \geq 30$ B) $Z \sim N(0,1)$ für $n \geq 30$
	σ bekannt ohne Zurücklegen	$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$	A) $Z \sim N(0,1)$ B) $Z \sim N(0,1)$ für $n \geq 30$ und $n/N < 0,05$
	σ unbekannt ohne Zurücklegen	$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$	A) $Z : t(n-1),\ Z \sim N(0,1)$ für $n \geq 30$ B) $Z \sim N(0,1)$ für $n \geq 30$ und $n/N < 0,05$
homograd	σ bekannt mit Zurücklegen	$\frac{\bar{P}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$	$\bar{P} : RB(n,p)$ relativiert binomial $Z \sim N(0,1)$ für $np(1-p) > 9$
	σ bekannt ohne Zurücklegen	$\frac{\bar{P}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}\frac{N-n}{N-1}}}$	$\bar{P} : RH(N,M,n)$ relativiert hypergeometrisch $Z \sim N(0,1)$ für $np(1-p) > 9$ und $n/N < 0,05$

Analog hierzu sind die Tests für andere Parameter durchzuführen!

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung



Beispiel zur Benutzung der Tabelle:

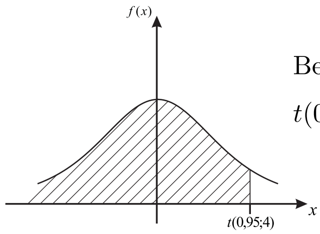
$P(Z \leq 2,36) = 0,9909$.

Man liest diesen Wert im Schnittpunkt

der Zeile 2.3 mit der Spalte 0,06.

z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Quantile der t–Verteilung

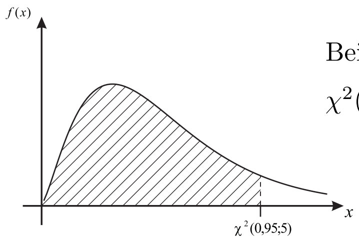


Beispiel zur Benutzung der Tabelle:

$t(0,95;4) = 2,1318$

n	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**
1	0,3249	0,7265	1,3764	3,0777	6,3137	12,7062	31,8210	63,6559
2	0,2887	0,6172	1,0607	1,8856	2,9200	4,3027	6,9645	9,9250
3	0,2767	0,5844	0,9785	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8408
4	0,2707	0,5686	0,9410	1,5332	2,1318	2,7765	3,7469	4,6041
5	0,2672	0,5594	0,9195	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321
6	0,2648	0,5534	0,9057	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074
7	0,2632	0,5491	0,8960	1,4149	1,8946	2,3646	2,9979	3,4995
8	0,2619	0,5459	0,8889	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554
9	0,2610	0,5435	0,8834	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498
10	0,2602	0,5415	0,8791	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693
11	0,2596	0,5399	0,8755	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058
12	0,2590	0,5386	0,8726	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545
13	0,2586	0,5375	0,8702	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123
14	0,2582	0,5366	0,8681	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768
15	0,2579	0,5357	0,8662	1,3406	1,7531	2,1315	2,6025	2,9467
16	0,2576	0,5350	0,8647	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208
17	0,2573	0,5344	0,8633	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982
18	0,2571	0,5338	0,8620	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784
19	0,2569	0,5333	0,8610	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609
20	0,2567	0,5329	0,8600	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453
21	0,2566	0,5325	0,8591	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314
22	0,2564	0,5321	0,8583	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188
23	0,2563	0,5317	0,8575	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073
24	0,2562	0,5314	0,8569	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7970
25	0,2561	0,5312	0,8562	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874
26	0,2560	0,5309	0,8557	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787
27	0,2559	0,5306	0,8551	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707
28	0,2558	0,5304	0,8546	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633
29	0,2557	0,5302	0,8542	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564
30	0,2556	0,5300	0,8538	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500
31	0,2555	0,5298	0,8534	1,3095	1,6955	2,0395	2,4528	2,7440
32	0,2555	0,5297	0,8530	1,3086	1,6939	2,0369	2,4487	2,7385
33	0,2554	0,5295	0,8526	1,3077	1,6924	2,0345	2,4448	2,7333
34	0,2553	0,5294	0,8523	1,3070	1,6909	2,0322	2,4411	2,7284
35	0,2553	0,5292	0,8520	1,3062	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238
36	0,2552	0,5291	0,8517	1,3055	1,6883	2,0281	2,4345	2,7195
37	0,2552	0,5289	0,8514	1,3049	1,6871	2,0262	2,4314	2,7154
38	0,2551	0,5288	0,8512	1,3042	1,6860	2,0244	2,4286	2,7116
39	0,2551	0,5287	0,8509	1,3036	1,6849	2,0227	2,4258	2,7079
40	0,2550	0,5286	0,8507	1,3031	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045
45	0,2549	0,5281	0,8497	1,3007	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896
50	0,2547	0,5278	0,8489	1,2987	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778

Quantile der χ^2–Verteilung

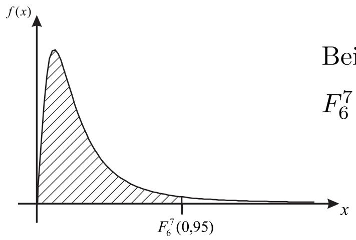


Beispiel zur Benutzung der Tabelle:

$\chi^2(0,95;5) = 11,07.$

$F(x)$	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
n										
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,832	15,086	16,750
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	16,812	18,548
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	18,475	20,278
8	1,344	1,647	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	20,090	21,955
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	21,666	23,589
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	23,209	25,188
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	24,725	26,757
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	26,217	28,300
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,041	19,812	22,362	24,736	27,688	29,819
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	29,141	31,319
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	30,578	32,801
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	32,000	34,267
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	33,409	35,718
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	34,805	37,156
19	6,844	7,633	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	36,191	38,582
20	7,434	8,260	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	37,566	39,997
21	8,034	8,897	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	38,932	41,401
22	8,643	9,542	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	40,289	42,796
23	9,260	10,196	11,689	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	41,638	44,181
24	9,886	10,856	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	42,980	45,558
25	10,520	11,524	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	44,314	46,928
26	11,160	12,198	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	45,642	48,290
27	11,808	12,878	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,195	46,963	49,645
28	12,461	13,565	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	48,278	50,994
29	13,121	14,256	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	49,588	52,335
30	13,787	14,953	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	50,892	53,672
40	20,707	22,164	24,433	26,509	29,051	51,805	55,758	59,342	63,691	66,766
50	27,991	29,707	32,357	34,764	37,689	63,167	67,505	71,420	76,154	79,490

0,95–Quantile der F-Verteilung



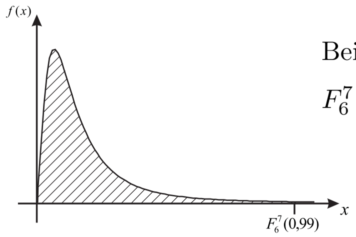
Beispiel zur Benutzung der Tabelle:

$F_6^7(0,95) = 4,21.$

Freiheitsgrade Nenner n

Freiheitsgrade Zähler m														
$\boldsymbol{n}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65

0,99–Quantile der F–Verteilung



Beispiel zur Benutzung der Tabelle:

$F_6^7(0,99) = 8,26.$

Freiheitsgrade Nenner n

Freiheitsgrade Zähler m														
$\boldsymbol{n}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**
1	4052,2	4999,3	5403,5	5624,3	5764,0	5859,0	5928,3	5981,0	6055,9	6106,7	6157,0	6208,7	6234,3	6260,4
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03