Prof. Dr. W. Assenmacher
Statistik und Ökonometrie

Universität Essen
FB Wirtschaftswissenschaften

Name:

Vorname:

Matrikel–Nr.:

Punkte:

Note:

Induktive Statistik

Klausur

Hinweise:

1. Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben mit **jeweils 20 Punkten**.
2. Von den maximal erreichbaren 120 Punkten sind für die Note „sehr gut" nur 100 Punkte notwendig.
3. Bearbeiten Sie die Klausuraufgaben so, wie sie gestellt sind, selbst wenn Sie einen Tippfehler vermuten! Die Bearbeitung erfolgt auf dem freien Platz unter jeder Aufgabe. Reicht der Platz nicht aus, ist die Rückseite des Aufgabenblattes zu verwenden. Geben Sie bei jeder Berechnung maximal 4 Stellen hinter dem Komma an ! Bei jeder Aufgabe sind Lösungsweg und/oder Begründung anzugeben. Fehlen diese Angaben, gilt die Aufgabe als nicht bearbeitet.
4. Hilfsmittel: Die mit der Klausur ausgegebene Formelsammlung und ein nicht programmierbarer Taschenrechner.
5. Bearbeitungszeit: 120 Minuten; <u>zusätzlich 15 Minuten Durchlesezeit</u>.

Aufgabe 1

(a) Ein Tanztheater hat für 30 Zuschauer Sitzplätze, die durch Reservierung vergeben werden. Aus Erfahrung weiß man, dass 10% der Reservierungen nicht eingehalten werden. Für eine ganz bestimmte Aufführung sind 33 Reservierungen angenommen worden.

(1) Wie viele Zuschauer können für die Aufführung erwartet werden? **(2)**

(2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Zuschauer einen Sitzplatz haben ? **(2)**

(3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 und höchstens 3 Sitzplätze frei bleiben ! **(3)**

(4) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ensemble vor einem überfüllten Saal tanzt ? **(3)**

(b) Im Durchschnitt sind in Deutschland pro Ausspielung auf 2 Lottoscheinen 6 richtige Zahlen angekreuzt. Geben Sie mit Begründung die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen X : „Anzahl der Lottoscheine mit 6 richtigen Zahlen pro Ausspielung“ an ! **(4)**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

(1) höchstens 2 Scheine, **(3)**

(2) mehr als 3 Scheine 6 richtige Zahlen aufweisen ! **(3)**

Aufgabe 2

(a) Gegeben ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \text{ für } (x,y) = (0,3),(1,2),(2,1),(3,0) \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{var}(X)$, $\mathrm{var}(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$ und den Korrelationskoeffizienten ! **(10)**

(b) Die gemeinsame Dichtefunktion für die stetigen Zufallsvariablen X und Y lautet:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & , \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1 \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

(1) Prüfen Sie, ob $f(x,y)$ tatsächlich eine Dichtefunktion darstellt ! **(2)**

(2) Berechnen Sie: $P(0 \le X \le \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \le Y \le 1)$ und $P(X \le Y)$! **(6)**

(3) Ermitteln Sie die Randdichte für X ! **(2)**

Aufgabe 3

Eine Füllmaschine füllt Flüssigkeit in 1-Liter Flaschen. Die abgefüllte Menge pro Flasche ist normalverteilt mit einem Erwartungswert von einem Liter; in 10,03% aller Abfüllungen sind mehr als 1,064 Liter in einer Flasche.

(1) Wie groß ist die Standardabweichung σ ? **(4)**

(2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die abgefüllte Menge um weniger als 0,01 Liter vom Erwartungswert abweicht ? **(4)**

(3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 0,9 Liter in der Flasche sind ? **(3)**

(4) Welche Abfüllmenge wird von 95% aller Flaschen nicht unterschritten ? **(4)**

(5) Enthält eine Flasche weniger als 0,95 Liter, gilt sie als Ausschuss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 zufällig entnommenen Flaschen mit Zurücklegen 2 Flaschen Ausschuss sind ? **(5)**

Aufgabe 4

(a) Am 17.6.1994 sahen 25% der Bewohner der Bundesrepublik Deutschland das Eröffnungsspiel der Fußballweltmeisterschaft zwischen Deutschland und Bolivien. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von fünf zufällig ausgewählten Personen (Ziehen ohne Zurücklegen)

(1) zwei Personen das Spiel sahen, **(3)**

(2) mindestens 2 Personen das Spiel sahen **(3)**

(3) die zweite Person, die das Spiel sah, als fünfte Person befragt wurde, **(3)**

(4) erst die fünfte Person das Spiel sah ? **(3)**

(b) Eine Grundgesamtheit besteht aus den Personen P_i , i=1,...,12. In wie vielen Stichproben ohne Zurücklegen mit dem Umfang n = 3

(1) befindet sich die Person P_1, **(2)**

(2) befinden sich die Personen P_1 und P_2 ? **(3)**

(3) In wie vielen Stichproben mit Zurücklegen befindet sich die Person P_1 ? **(3)**

Aufgabe 5

(a) Was versteht man unter einer einfachen Zufallsstichprobe ? **(5)**

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Element der Grundgesamtheit in eine Stichprobe mit Zurücklegen und in eine Stichprobe ohne Zurücklegen aufgenommen wird ? **(5)**

(c) Ein Merkmal X hat in einer Grundgesamtheit den Mittelwert μ und die Varianz σ^2. Bestimmen Sie für die Stichprobenfunktion

$$\bar{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_n) + \frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1} X_i,$$

der eine einfache Zufallsstichprobe zugrunde liegt, $\mathrm{E}(\bar{X})$ und $\mathrm{var}(\bar{X})$! **(10)**

Aufgabe 6

(a) Was versteht man unter einer erwartungstreuen Schätzfunktion ? **(3)**

(b) $\hat{\theta}_1$ und $\hat{\theta}_2$ sind erwartungstreue Schätzfunktionen für den Parameter θ. Prüfen Sie, ob die folgenden Schätzfunktionen ebenfalls erwartungstreu sind !

(1)	$\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2$	(2)	$\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2$
(3)	$3\hat{\theta}_1 - 2\hat{\theta}_2$	(4)	$\frac{1}{2}(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)$
(5)	$\frac{2}{3}\hat{\theta}_1 + \frac{1}{2}\hat{\theta}_2$		

(5)

(c) Entwickeln Sie auf der Basis einer einfachen Stichprobe die Schätzfunktion für μ einer beliebig verteilten Grundgesamtheit gemäß der Methode der kleinsten Quadrate ! Zeigen Sie, dass diese Schätzfunktion erwartungstreu ist ! Gilt dies auch für die Schätzfunktion

$$\bar{X} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

X_i : Stichprobenvariablen, ? **(7)**

(d) Das Merkmal X ist in einer Grundgesamtheit normalverteilt mit unbekanntem μ und einer Varianz $\sigma^2 = 16$. Eine einfache Zufallsstichprobe lieferte die folgenden Realisationen:

-11 -14 -8 -6 -5 -12 -11 -4 -9.

Stellen Sie für μ das Konfidenzintervall bei einem Konfidenzniveau von 0,9 auf ! **(5)**

Aufgabe 7

Bei einer Totalbefragung von 2000 Unternehmern einer bestimmten Branche nach ihrer Einschätzung der wirtschaftlichen Entwicklung im nächsten Jahr gaben 40% an, dass sie mit einem Aufschwung rechnen. Ein halbes Jahr nach der Totalerhebung wurde eine Zufallsstichprobe ohne Zurücklegen im Umfang n = 400 erhoben. Hier gaben 46% der Befragten an, dass sie im nächsten Jahr einen Aufschwung erwarten.

(a) Was versteht man unter dem α–Fehler (Fehler 1. Art) und dem β–Fehler (Fehler 2. Art)? **(6)**

(b) Testen Sie, ob das Stichprobenergebnis zu der Vermutung berechtigt, dass sich in der Grundgesamtheit die Einschätzung bezüglich der wirtschaftlichen Entwicklung signifikant geändert hat ! Der α–Fehler soll 5% betragen ! Erläutern Sie den Testvorgang anhand einer Grafik ! **(8)**

(c) Zeigen Sie anhand einer Grafik den β–Fehler für den unter (b) durchgeführten Test, und berechnen Sie den β–Fehler ! **(6)**