Ingo Janiszczak Universität Duisburg-Essen

Klausur zum Vortermin

Mathematische Grundlagen I
WS 2007/2008

Aufgabe 1:

Seien $r \in \mathbb{R}$ und $U_r =< (0,1,2,2-r), (r+1,1,2,3), (r,1,2,3-r), (r+2,0,1,2) >$, d.h. U_r ist das Erzeugnis der angegebenen Vektoren. Bestimmen Sie alle r, für die $dim\ U_r \neq 4$ ist, und geben Sie für diese r jeweils eine Basis von U_r an.

Aufgabe 2:

Seien $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $Ker(\mathcal{A})$, und zeigen Sie, dass $\mathfrak{v} \in Im(\mathcal{A})$ ist.
(Hinweis: Beides kann man in einem 'Rutsch' machen.)

b) Zeigen Sie, dass jedes Element aus $Ker(\mathcal{A})$ in $Im(\mathcal{A})$ enthalten ist, d.h. $Ker(\mathcal{A}) \subseteq Im(\mathcal{A})$.
(Hinweis: Das sieht man der Matrix auf den ersten 'Blick' an, wenn man weiß, wie die Elemente aus $Ker(\mathcal{A})$ aussehen.)

c) Bestimmen Sie $dim\ Im(\mathcal{A})$, $dim\ (Ker(\mathcal{A}) \cap Im(\mathcal{A}))$ und $dim\ (Ker(\mathcal{A}) + Im(\mathcal{A}))$.

Aufgabe 3:

a) Seien $s \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} s & 1 & s \\ -1 & s & 1 \\ s & 1 & s \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Eigenwerte von $\mathcal{A}$ in Abhängigkeit von s.

b) Sei $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ diagonalisierbar ist. Benutzen Sie dazu, dass das Charakteristische Polynom von $\mathcal{B}$ gleich $(x-1)^2 \cdot (x+1)^2$ ist, ohne dieses zu berechnen.

c) Geben Sie eine invertierbare Matrix $\mathcal{P}$ und eine Diagonalmatrix $\mathcal{D}$ an, für die $\mathcal{P}^{-1} \cdot \mathcal{B} \cdot \mathcal{P} = \mathcal{D}$ gilt.

Aufgabe 4:

Gegeben sei das lineare Ungleichungssystem

$$(U) \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2 \cdot x_2 & + & 4 \cdot x_3 & \geq & 8 \\ & & x_2 & + & 2 \cdot x_3 & \leq & 6 \\ x_1 & & & - & 4 \cdot x_3 & \leq & -2 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2 \cdot x_3 & \leq & 2 \\ x_1 & - & 2 \cdot x_2 & & & \leq & 8 \end{array}$$

und der Vektor $\mathfrak{u} = (2, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Zeigen Sie, dass die Funktion $\gamma(x_1, x_2, x_3) = 4 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3$ auf der Lösungsmenge des Ungleichungssystems (U) ein Maximum annimmt und berechnen Sie dieses. Benutzen Sie dazu den Vektor $\mathfrak{u}$. Dieser ist eine Lösung des Ungleichungssystems (U) (dies brauchen Sie nicht zu zeigen).

Geben Sie außerdem eine optimale Lösung $\mathfrak{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ an, an der dieses Maximum angenommen wird.

(Hinweise: Achten Sie auf die Relationszeichen $\leq$ und $\geq$. Bei der 'richtigen' Vorgehensweise treten keine Brüche auf! Die größten Zahlen, die auftauchen sollten, sind 18, 22, 34 und 38.)