Universität Duisburg-Essen/Campus Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Dr. h.c. G. Frey

Nachklausur zur Vorlesung Mathematische Grundlagen I (28.03.2007, 11:00-13:00)

Aufgabe 1: (3 Punkte)
Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch die Matrix

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Kern in Basisdarstellung sowie eine Basis des Bildes.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden inhomogenen linearen Gleichungssysteme.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$. Führen Sie notwendige Fallunterscheidungen durch!

$$\lambda x + y + z = -1$$

$$x + \lambda y + z = 0$$

$$x + y + \lambda z = 1$$

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Berechnen Sie die inversen Matrizen.

a)

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Berechnen Sie folgende Determinante:

$$det \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: (9 Punkte)
Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(x)$, die reellen Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8: (10 Punkte)
Betrachten Sie folgendes System linearer Gleichungen und Ungleichungen:

$$x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 - x_4 \leq 2$$

$$x_2 + x_3 \leq 1$$

$$-x_1 - 2x_3 + x_4 \leq 0$$

$$x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 2$$

$$\gamma(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 1$$

Bringen Sie dieses System auf Normalform und lösen Sie das entstandene Optimierungsproblem.