Universität Duisburg-Essen/Campus Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Dr. h.c. G. Frey

Klausur zur Vorlesung Mathematische Grundlagen I (09.02.2007, 16:00-18:00)

Aufgabe 1: (3 Punkte)
Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion für $a \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch die Matrix

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Kern in Basisdarstellung sowie eine Basis des Bildes.

Aufgabe 3: (5 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden inhomogenen linearen Gleichungssysteme.

**a)**

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**b)**

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: (3 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$. Führen Sie notwendige Fallunterscheidungen durch!

$$2x + \lambda y + z = 5$$

$$2x + y + \lambda z = 0$$

$$x - 3y + 2z = 2$$

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Berechnen Sie die inversen Matrizen.

**a)**

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**b)**

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Berechnen Sie folgende Determinante:

$$det \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: (9 Punkte)
Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(x)$, die reellen Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8: (10 Punkte)

Betrachten Sie folgendes System linearer Gleichungen und Ungleichungen:

$$x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4$$

$$x_1 - x_2 - x_4 \leq 5$$

$$x_2 + x_4 \geq 1$$

$$-x_1 - x_3 + 3x_4 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 \geq 0$$

$$\gamma(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - 2x_2 - 3x_4$$

Bringen Sie dieses System auf Normalform und lösen Sie das entstandene Optimierungsproblem.