1. Konvergenz von Folgen und Reihen, Potenzreihen, stetige Funktionen

Eine Zahlenfolge entsteht, wenn man jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl zuordnet, etwa a_n, symbolisch:

$$(a_1, a_2, ...)$$
$$(a_n)\, n \in \mathbb{N}$$
$$(a_n)\, n = 1, 2, 3, ...$$
$$(a_n)$$

a_k heißt das k-te Glied oder Element der Folge $(a_k)_k$

1. Beispiele:

Folgenglieder einmal als „mathematische Ausdrücke“ gegeben oder durch den „Anfang der Folge“:

$$\left(\tfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, ...\right)$$
$$\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, ...)$$
$$\left(\sin \tfrac{n\pi}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, ...)$$

„mathematische Ausdrücke“ sind eindeutig, Pünktchenschriebweise nicht!

$$(1, 0, -1, 0, ...) \xrightarrow{?} (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, ...)$$
$$(1, 0, -1, 0, ...) \xrightarrow{?} (1, 0, -1, 0, 2, 0, -2, 0, ...)$$

Die Zählung der Folgenglieder kann abgeändert werden:

$$(a_n)_{n=0,1,2,...} = (a_0, a_1, a_2, ...)$$
$$(a_{2n})_{n=0,1,2,...} = (a_0, a_2, a_4, ...)$$

Zentrale Frage: Konvergiert eine gegebene Folge und was ist ihr Grenzwert(in diesem Fall)?

Wie verhalten sich die Folgenglieder mit wachsendem n?

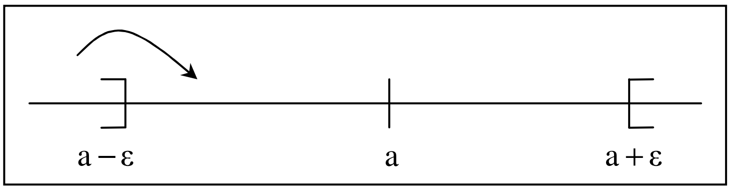
Verschiedene Möglichkeiten:

a) Ist $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, so nähert sich a_n der Zahl $a = 0$ beliebig gut an

b) Ist $a_n = (-1)^n$, so springen die Werte zwischen $a = 1$ und $b = -1$

c) Ist $a_n = n^2$, so wächst a_n über jede positive Schranke

a sei eine reelle Zahl, $(a_n)_n$ eine Folge
Legen um a ein symmetrisches offenes Intervall:



2. Definition:

Die Folge (a_n) heißt konvergent, falls es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt mit der folgenden Eigenschaft:
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$:

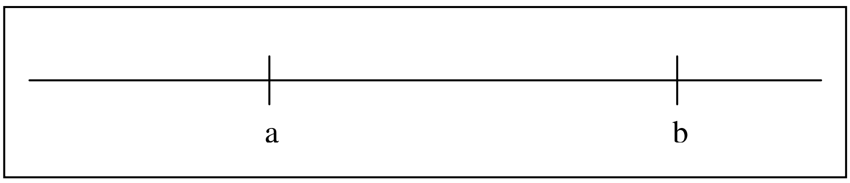
$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$
$$(\quad -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon)$$
$$(|a_n - a| < \varepsilon)$$

Dann heißt $(a_n)_n$ konvergent gegen a und a der <u>Grenzwert</u> (oder auch <u>Limes</u>) von $(a_n)_n$,

symbolisch: $$\begin{aligned} a &= \lim a_n \\ &= \lim_{n\to\infty} a_n \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \\ a_n \to a \end{array} \right.$$

Falls es kein solches a gibt, heißt $(a_n)_n$ <u>divergent</u>.

Eine Folge kann nicht zwei Grenzwerte haben:
Angenommen, a und b wären Grenzwerte von $(a_n)_n, a \neq b$



Für $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ ist das ein Widerspruch!

3. Beispiel:

Es sei $a_n = \frac{1}{n}$

Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
Beweis: Verwende Def. 2 mir $a = 0$:

Ist $\varepsilon > 0$, so ist:

$$|a_n - a| = |\tfrac{1}{n} - 0| = \tfrac{1}{n} < \varepsilon,$$

falls $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ist. Man kann also ein beliebiges n_0 mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ wählen.

Manchmal kann man aus Folgen konvergente Teilfolgen auswählen, auch wenn die Folge selbst divergent ist.

4. Beispiel:

$$\begin{aligned}(a_n)_n &= \left((-1)^n + \tfrac{1}{n}\right)_n \\ &= \left(-1+1, 1+\tfrac{1}{2}, -1+\tfrac{1}{3}, 1+\tfrac{1}{4}, \ldots\right) \\ &= \left(0, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{4}, \ldots\right)\end{aligned}$$

Für $n = 2m$ ist

$$a_n = a_{2m} = 1 + \tfrac{1}{2m}$$

für $n = 2m-1$ ist

$$a_n = a_{2m-1} = -1 + \tfrac{1}{2m-1}$$

Also ist
$$\lim_{m\to\infty} a_{2m} = 1$$
$$\lim_{m\to\infty} a_{2m-1} = -1$$

5. Definition:

Ist $(a_n)_n$ eine Folge und a der Grenzwert einer Teilfolge von $(a_n)_n$, so heißt a <u>ein Häufungspunkt</u> von $(a_n)_n$.

Falls $(a_n)_n$ <u>konvergent</u> ist gegen a, so ist a der <u>einzige</u> Häufungspunkt von $(a_n)_n$
Die <u>Umkehrung</u> gilt aber <u>nicht</u> !

Nachteil der obigen Konvergenzdefinition:

Man benötigt einen Kandidaten für den Grenzwert a, um $|a_n - a|$ abschätzen zu können.
a ist aber oft nicht leicht zu finden:

Beispiele:

$$a_n = \left(1+\tfrac{1}{2n}\right)^n$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k}$$

Gesucht: Grenzwertunabhängiger Test auf Konvergenz einer Folge!

6. Definition

$(a_n)_n$ sei eine Folge.

a) $(a_n)_n$ wächst monoton (streng monoton), falls für $n \in \mathbb{N}$ $\quad a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n < a_{n+1})$
$(a_n)_n$ fällt monoton (streng monoton), falls jeweils $a_n \geq a_{n+1} \quad (a_n > a_{n+1})$ ist.

b) $(a_n)_n$ ist nach oben beschränkt, falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit:

$$a_n \leq M \quad (a_n \geq M)$$

falls alle $n \in \mathbb{N}$
M heißt dann eine obere (untere) Schranke von $(a_n)_n$.

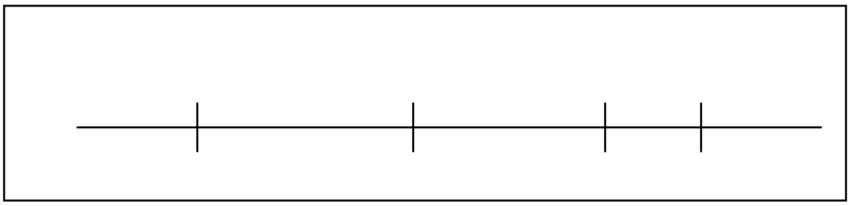
c) $(a_n)_n$ heißt beschränkt <=> $(a_n)_n$ ist nach oben und unten beschränkt:

$$M_1 \leq a_n \leq M_2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar kann man M_1 und M_2 dann so wählen, dass $M_2 \geq 0$ und $M_1 = -M_2$ ist, d.h.

$$-M \leq a_n \leq M$$

$$|a_n| \leq M$$



7. Satz (Konvergenzkriterium für Folgen)

a) Falls die Folge $(a_n)_n$ monoton wächst und nach oben beschränkt ist, so ist $(a_n)_n$ konvergent.
Ist $a_n \leq M$, so ist auch $a = \lim_{n\to\infty} a_n \leq M$.

Falls $(a_n)_n$ monoton fällt und nach unten beschränkt ist, so ist $(a_n)_n$ konvergent.
Ist $a_n \geq M$, so ist auch $a = \lim_{n\to\infty} a_n \geq M$

b) Ist $(a_n)_n$ nicht beschränkt, so ist $(a_n)_n$ divergent
(Umkehrung gilt aber nicht!)

8. Beispiel: (Definition der Zahl e)
Setze $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$
Dann ist

$$(a_n)_n = \left(2, \left(\tfrac{3}{2}\right)^2, \left(\tfrac{4}{3}\right)^3, \ldots\right)$$
$$= \left(2, \tfrac{9}{4}, \tfrac{64}{27}, \ldots\right)$$

Man kann zeigen, dass $(a_n)_n$ monoton wächst und dass $a_n \leq 3$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.
Also ist $(a_n)_n$ konvergent.

Setze $e := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
e heißt Eulersche Zahl und ist die Basis der sog. natürlichen Logarithmen

e kann näherungsweise (mit beliebiger Genauigkeit) durch Berechnen von a_n bestimmt werden, z.B. durch Bestimmen von a_{10^k} für $k = 1, 2, 3, \ldots$

9. Satz
a) Ist $(a_n)_n$ eine Folge, $a \in \mathbb{R}$ und $(c_n)_n$ eine Folge mit $\lim_n c_n = 0$ und gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a| \leq c_n$$

so ist $\lim_n a_n = a$

b) Sind $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ Folgen mit $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = b$, so ist

$$\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$$

Ist $b \neq 0$, so

$$\lim_n \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$

c) Ist $|q| < 1$, so ist $\lim_n q^n = 0$

10. Beispiele

a) Setze $a_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2+\frac{1}{n^2}}, n \in \mathbb{N}$.

Es ist $\lim\limits_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$,

ferner $\frac{1}{n} \to 0$, also $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \bullet \frac{1}{n} \to 0 \bullet 0 = 0$,

d.h. $2 + \frac{1}{n^2} \to 2$

also ist $\lim\limits_n a_n = \frac{e}{2}$

b) Für $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + ... + q^n$ gilt:

$a_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, falls $q \neq 1$

$= \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$

Ist also $\underline{|q| < 1}$, so ist $\lim\limits_n q^n = 0$, folglich ist dann:

$\lim\limits_n a_n = \frac{1}{1-q}$

c) Setze $a_n = \sum\limits_{k=1}^{k} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$

Ist $(a_n)_n$ konvergent?

Es ist:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 && = 1 = \tfrac{2}{2} \\
a_2 &= 1 + \tfrac{1}{2} && = \tfrac{3}{2} \\
a_4 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} && \geq \tfrac{3}{2} + 2 \bullet \tfrac{1}{4} = \tfrac{4}{2} \\
a_8 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} && \geq \tfrac{4}{2} + 4 \bullet \tfrac{1}{8} = \tfrac{5}{2}
\end{aligned}$$

allgemein:

$a_{2^k} \geq 1 + \frac{4}{2}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$

Ist also ein $M \geq 0$ vorgegeben, so wähle ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 + \frac{k}{2} \geq M$. Dann ist

$a_{2^k} \geq M$

$(a_n)_n$ ist also nicht nach oben beschränkt, also **divergent**!

11. Definition $\left(\infty \text{ und} -\infty \text{ als Grenzwerte}\right)$

Ist $(a_n)_n$ eine Folge, so schreibt man

$$\lim_n a_n = \underset{(-\infty)}{\infty},$$

falls es für jedes $M \geq 0$ ein $n_o \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$a_n \underset{(\leq -M)}{\geq M}$$

für alle $n \geq n_o$
"$\pm\infty$" nennt man den (uneigentlichen) Grenzwert von $(a_n)_n$

In diesem Sinne ist:

$$\lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k} \right) = \infty$$

Ein weiteres Beispiel dafür ist:

12. Beispiele

Ist $q > 1$, so ist

$$\begin{aligned} q^n &= \left(1 + (q-1)\right)^n \qquad q - 1 > 0 \\ &\overset{\text{bin. Formel}}{=} 1 + n(q-1) + \underbrace{\binom{n}{2}(q-1)^2 + \ldots}_{>0} \\ &> 1 + n(q-1) \\ &\geq M \text{ für jedes } M \geq 0, \text{ falls man n hinreichend groß wählt} \end{aligned}$$

Also ist $\lim_n q^n = \infty \quad$, falls $q > 1$

Man kann auf Folgen, die gegen ∞ oder $-\infty$ konvergieren, die Rechenregeln für Grenzwerte aus 9b) anwenden, wenn man dabei die folgenden Rechenregeln für $\pm\infty$ beachtet:

$a + \infty = \infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$ (d.h., falls $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = \infty$, so ist $\lim(a_n + b_n) = \infty$

$\infty + \infty = \infty$
$a - \infty = -\infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$
$-\infty - \infty = -\infty$

$$a \cdot \infty = \begin{cases} \infty, \text{falls } a > 0 \\ -\infty, \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, \text{falls } a > 0 \\ \infty, \text{falls } a > 0 \end{cases}$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$$

$$-\infty \cdot \infty = -\infty$$

$$\tfrac{1}{\pm\infty} = 0$$

Nicht definiert(und daher nicht verwendbar) sind die Ausrücke:

$$-\infty + \infty, 0 \cdot (\pm\infty), \tfrac{\pm\infty}{0}, \tfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Diese Ausdrücke sind nicht eindeutig definierbar

z. B. $0 \cdot (\pm\infty)$:

Setze z.B. $a_n = \frac{1}{n^2},\ b_n = \frac{1}{n},\ c_n = n,\ d_n = n^2$

$$\lim a_n = 0 = \lim b_n,$$
$$\lim c_n = \infty = \lim d_n,$$

aber $\lim a_n \cdot c_n = \lim \frac{1}{n^2} \cdot n = \lim \frac{1}{n} = 0$

„Definition“ $0 \cdot \infty = 0$?

$\lim a_n \cdot d_n = \lim \frac{1}{n^2} \cdot n^2 = \lim 1 = 1$

„Definition“ $0 \cdot \infty = 1$?

$\lim b_n \cdot d_n = \lim \frac{1}{n} \cdot n^2 = \lim n = \infty$

„Definition“ $0 \cdot \infty = \infty$?

13. Beispiele

a) $$a_n = \underbrace{\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0} \underbrace{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n}_{\to e}}_{\to 0} + \underbrace{2^n}_{\infty} \to 0 + \infty = \infty$$

b) Es sei $0 < |q| < 1$ Dann ist $\frac{1}{|q|} > 1$

also $$\lim_n \underbrace{\left(\tfrac{1}{|q|}\right)^n}_{\frac{1}{|q^n|}} = \infty$$

Folglich gilt: $$\left| q^n = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{|q^n|}}_{\to\infty}} \right| \to 0$$

d.h. $q^n \to 0$

(unendliche) Reihen sind spezielle Folgen

Sie haben eine symbolische Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k ,$$

wobei c_k reelle Zahlen sind.
c_k heißt das k-te Reihenglied.

Betrachtung dazu die Folge der Teilsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}:$$

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1 \\ s_2 &= c_1 + c_2 \\ s_3 &= c_1 + c_2 + c_3 \\ &\vdots \\ s_n &= c_1 + c_2 + ... + c_n \end{aligned}$$

Frage: Ist $(c_n)_n$ konvergent?

14.Definition

Falls mit diesen Bezeichnungen $s = \lim_n s_n$ existiert, so sagt man:
$\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ ist konvergent (oder existiert) und hat den Wert s, symbolisch;

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \lim \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \right) = s$$

Falls $(s_n)_n$ divergent ist, dann heißt $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ divergent.
Falls $\lim_n s_n = \pm\infty$, schriebt man:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \pm\infty$$

(unendliche Konvergenz)

15. Beispiele

a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} = \lim\left(\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k}\right) = \infty$$

b) $$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \lim_n \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right)$$
$$= \lim_n \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \text{falls } q \neq 1 \\ n+1, \text{falls } q = 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{1-q}, \text{falls } |q| < 1 \\ \infty \ , \text{falls } q = 1 \\ \infty \ , \text{falls } q \geq 1 \\ \text{divergent}, \text{falls } q \leq -1 \end{cases}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ heißt die „geometrische Reihe“

i.a. muss man die Frage nach der Konvergenz einer Reihe trennen von der Frage, welchen Wert der Grenzwert hat

Zur Feststellung ob eine Reihe konvergiert, dienen so genannte <u>Konvergenzkriterien</u>

16. Satz (Konvergenzkriterien für Reihen)

a) Falls $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ existiert (im eigentlichen Sinn!)
so ist $\lim_k c_k = 0$
(Divergenzkriterium: Falls $(c_k)_k$ nicht gegen 0 konvergiert, ist $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ divergent)

b) (Leibnitzkriterium für alternierende Reihen)
Falls $c_k > 0$, monoton fallend und $\lim c_k = 0$, so ist eine Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} c_k = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 \pm \ldots \text{konvergent}$$
Setzt man
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} c_k$$
und $$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} c_k,$$
so ist
$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots \leq s \leq \ldots \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1,$$

die Teilsummern könne also zur näherungsweisen Berechnung von s benutzt werden.

c) (Wurzelkriterium)

Falls $\lim\limits_{k} \sqrt[k]{|c_k|} = c < 1$ gilt, so ist

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent

Falls $\lim\limits_{k} \sqrt[k]{|c_k|} = c > 1$ gilt, ist $\sum c_k$ divergent

Für $\lim\limits_{k} \sqrt[k]{|c_k|} = c = 1$ keine allg. Aussage

d) (Quotientenkriterium)
Analog zu c) für

$$c = \lim_{k} \left| \tfrac{c_{k+1}}{c_k} \right|$$

e) (Vergleichskriterium):

Für 2 Folgen $(a_k)_k$ und $(b_k)_k$ gelte:

$$0 \le a_k \le b_k$$

Ist dann $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist auch
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent (Majorantenkriterium)

Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent (d.h. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$), so ist auch
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent (d.h. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$) (Minorantenkriterium)

17. Beispiele

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent (d.h. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$)

Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots$?

$\frac{1}{k} \ge 0, \left(\frac{1}{k}\right)_k$, fällt monoton, $\lim\limits_{k} \frac{1}{k} = 0$, also ist die Reihe nach dem Leibnizkriterium konvergent.

Grenzwert : $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$?

$$\tfrac{1}{2} = 1 - \tfrac{1}{2} \le s \le 1$$
$$\tfrac{7}{12} = \tfrac{5}{6} - \tfrac{1}{4} \le s \le 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{6}$$

b) Test des Wurzel- und Quotientenkriteriums für die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k, q \in \mathbb{R}$:

Wurzelkriterium:

$$a_k = q^k, \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{|q^k|} = \sqrt[k]{|q|^k} = |q| \qquad \lim_k \sqrt[k]{|a_k|} = |q|$$

falls $|q| < 1$, ist die Reihe konvergent
falls $|q| > 1$, ist die Reihe divergent

Was gilt für $|q| = 1$?

Dafür die Reihe direkt untersuchen:

$$|q| = 1 \quad \Rightarrow |q^k| = 1 \text{ für alle } k$$
$$\Rightarrow |q^k| \not\to 0$$
$$\Rightarrow \text{Reihe divergent nach 16 a)}$$

Quotientenkriterium:

$$a_k = q^k, \left|\tfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\tfrac{q^{k+1}}{q^k}\right| = |q| \overset{k\to\infty}{\to} |q|$$

Falls $|q| < 1$, ist die Reihe konvergent.
Weiter wie zuvor

c) Manchmal ist das Wurzelkriterium leichter anzuwenden als das Quotientenkriterium (oder umgekehrt):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k!} \text{ konvergent?}$$

Wurzelkriterium: $|a_k| = \tfrac{1}{k!}$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left|\tfrac{1}{k!}\right|} = \tfrac{1}{\sqrt[k]{k!}} \overset{k\to\infty}{\to} ?$$

Quotientenkriterium: $a_k = \tfrac{1}{k!}$

$$\left|\tfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \overset{k\to\infty}{\to} 0$$

$0 < 1$, also ist die Reihe konvergent!

[übrigens: $\lim_k \sqrt[k]{k!} = \infty$]

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent?

Wurzelkriterium: $\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^2} \underset{\text{Beweis}}{\overset{\text{ohne}}{\longrightarrow}} 1$

$\left(\sqrt[k]{k} \to 1, \left(\sqrt[k]{k}\right)^2 \to 1\right)$

ebenfalls keine Entscheidung mit Quotientenkriterium.

zunächst: Untersuchung von $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ auf Konvergenz

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^{n} \left(-\tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{k-1}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \left(\tfrac{1}{k-1} - \tfrac{1}{k}\right) \\
&= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} - \ldots - \tfrac{1}{n} \\
&= 1 - \tfrac{1}{n}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n} \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) = 1$$

es ist für jedes $k \geq 2$

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k \cdot k} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

also ist nach dem Majorantenkriterium $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent und $\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1}$

Dann ist also auch: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$

[Es ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$]

Für viele Anwendungen sind spezielle Reihen wichtig, sog. Potenzreihen.
Das sind Reihen der Form:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{c_k \left(x - x_0\right)^k}_{a_k}$$

Dabei ist $\underbrace{c_k}_{k\text{-te Koeff.}} \in \mathbb{R}$, $\underbrace{x_0}_{\text{Entwickl.-Punkt der Reige}} \in \mathbb{R}$ und x eine Variable

18. Beispiele

a) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ Dann ist $x_0 = 0$ und $c_k = 1$ für $k = 0,1,...$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \pm ...$ Dann ist

$x_0 = 1$ und $c_k = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}, k = 1,2,...$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm ...$ Dann ist

$x_0 = 0, c_{2k} = (-1)^k \frac{1}{(2k)!}, k = 0,1,2,...$

$c_{2k+1} = 0 \quad , k = 0,1,2,...$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$ Dann ist $x_0 = 0, c_k = \frac{1}{k!}$

Die wichtigste Frage an eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ ist:
Für welche Werte von x ist die Reihe konvergent?

<u>Entscheidung mit dem Wurzelkriterium:</u>

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{|c_k| \cdot |x - x_0|^k}$$
$$= |x - x_0| \cdot \sqrt[k]{|c_k|}$$

$$\lim_k \sqrt[k]{|a_k|} = |x - x_0| \cdot \lim_k \sqrt[k]{|c_k|}$$

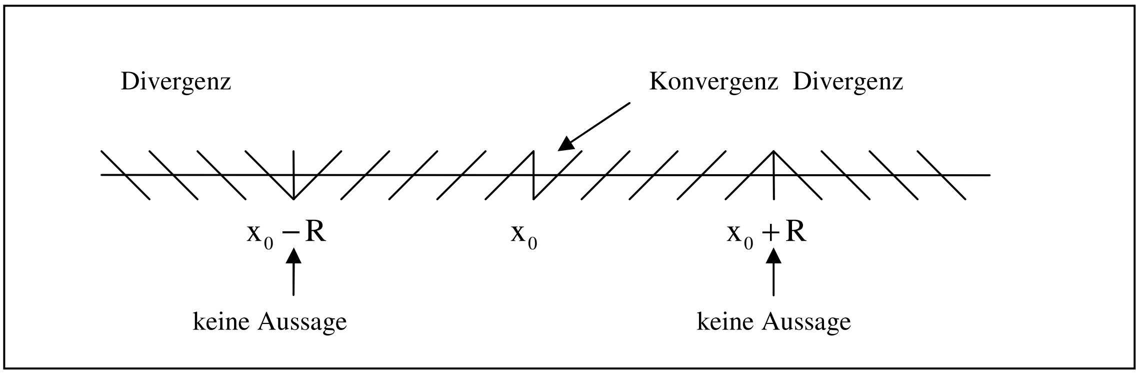
falls also $|x - x_0| \cdot \lim_k \sqrt[k]{|c_k|} < 1$, liegt für dieses x Konvergenz vor

für $|x - x_0| \cdot \lim_k \sqrt[k]{|c_k|} > 1$, ist die Reihe divergent, d.h.

Konvergenz, falls: $|x - x_0| < \frac{1}{\lim \sqrt[k]{|c_k|}}$,

Divergenz, falls: $|x - x_0| > \frac{1}{\lim \sqrt[k]{|c_k|}}$

Setze $R := \frac{1}{\lim \sqrt[k]{|c_k|}}$



Ist $\lim \sqrt[k]{|c_k|} = 0$, so ist $R\left(=\frac{1}{0}\right) = \infty$, d.h. die Reihe konvergierend für jedes $x \in \mathbb{R}$

Ist $\lim \sqrt[k]{|c_k|} = \infty$, so ist $R\left(=\frac{1}{\infty}\right) = 0$, d.h. die Reihe konvergiert nur für $x = x_0$

Zusammengefasst ergibt sich

19. Satz

Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(x - x_0\right)^k$

Die Reihe konvergiert $\begin{cases} \text{für alle } x \text{ mit } |x - x_0| < \frac{1}{\lim \sqrt[k]{|c_k|}}, \text{falls } 0 \neq \lim ... \neq \infty \\ \text{für alle } x, \text{falls } \lim ... = 0 \\ \text{nur für } x = x_0, \text{falls } \lim ... = \infty \end{cases}$

Die Reihe ist divergent für alle x mit $|x - x_0| > \frac{1}{\lim ...}$, falls $0 \neq \lim ... \neq \infty$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lim \sqrt[k]{|c_k|}}, \text{falls } 0 \neq \lim ... \neq \infty \\ \infty \quad, \text{falls } \lim ... = 0 \\ 0 \quad, \text{falls } \lim ... = \infty \end{cases}$$

heißt der <u>Konvergenzradius der Reihe</u>, $]x_0 - R, x_0 + R[$ heißt das (offene) <u>Konvergenzintervall der Reihe</u>.

20. Hilfssatz

Es ist $\begin{matrix} \lim_k \sqrt[k]{k} = 1 \\ \lim_k \sqrt[k]{k!} = \infty \end{matrix}$

21. Beispiele

a) $\sum_{k=}^{\infty} x^k$, $c_k = 1 \text{ für alle } k, x_0 = 0$

$\sqrt[k]{|c_k|} = 1 \xrightarrow{\to\infty} 1$, d.h. $R = 1$, d.h. die Reihe konvergiert für $\begin{matrix} |x| < R = 1 \\ |x| < 1 \end{matrix}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}$, $c_k = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}, k = 1, 2, ...$, $x_0 = 1$

$\sqrt[k]{|c_k|} = \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \xrightarrow{k\to\infty} 1$, d.h. $R = 1$,

die Reihe konvergiert für alle x mit $|x - 1| < 1$, d.h. für alle $x \in]0, 2[$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $c_k = \frac{1}{k!}, x_0 = 0$

$\sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} \to \frac{1}{\infty} = 0$, $R = \infty$

die Reihe konvergiert also für jedes $x \in \mathbb{R}$

d) $c_{2k} = (-1)^k \frac{1}{(2k)!} (c_{2k+1} = 0)$

$$\sqrt[2k]{|c_{2k}|} = \sqrt[2k]{\left|\frac{1}{(2k)!}\right|} = \frac{1}{\sqrt[2k]{(2k)!}} \xrightarrow{k\to\infty} 0, \quad R = \infty,$$

auch diese Reihe ist konvergent für jedes $x \in \mathbb{R}$

$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}$: $\sqrt[2k+1]{\frac{1}{(2k+1)!}} = \frac{1}{\sqrt[2k+1]{(2k+1)!}} \to \frac{1}{\infty} = 0$

Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$

Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ konvergent für alle $x \in I$ (I ein Intervall), so wird durch

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

auf I eine Funktion definiert.

Ist die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

konvergent auf einem Intervall I, so ist durch

$$(*) \quad f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

eine Funktion auf I definiert.

Umgekehrte Fragestellung: Gegeben eine Funktion f auf einem Intervall I. Gibt es dann eine Potenzreihe der obigen Form, so dass (*) gilt?

22. Beispiel

Die Exponentialfunktion wurde „definiert" durch:

$\exp x := e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Setze $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$

Die Reihe ist für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent.

Dann gilt:

1. $f(o) = 1$
2. für alle x und y gilt:

$$
\begin{aligned}
f(x) \bullet f(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{x^k}{k!}\right) \bullet \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{y^k}{k!}\right) \\
&= \left(1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{6} + \ldots\right)\left(1 + y + \tfrac{y^2}{2} + \tfrac{y^3}{6} + \ldots\right) \\
&= 1 + (x+y) + \left(\tfrac{x^2}{2} + xy + \tfrac{y^2}{2}\right) + \left(\tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^2 y}{2} + \tfrac{xy^2}{2} + \tfrac{y^3}{6}\right) + \ldots \\
&= 1 + (x+y) + \tfrac{1}{2}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) + \tfrac{1}{6}\left(x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3\right) + \ldots \\
&= 1 + (x+y) + \tfrac{1}{2}(x+y)^2 + \tfrac{1}{6}(x+y)^3 + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(x+y)^k}{k!} \\
&= f(x+y)
\end{aligned}
$$

Das entspricht der Regel $\exp(x+y) = \exp x \bullet \exp y$

Man kann zeigen, dass aus den Eigenschaften

1. und 2. folgt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \exp x \quad$ ist.

23. Satz
Es gilt

a) $\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

b) $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

c) $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)"}$

für alle $x \in \mathbb{R}$ (gilt für a) bis c))

d) $\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k} \quad (R = 1, \text{d.h. für } x \in]0,2[)$

24. Definition
M sei eine Teilmenge von $\mathbb{R}, f : M \to \mathbb{R}_x$ eine Funktion, x_0 ein Punkt, für den eine Folge $(x_n)_n \subset M$ mit $\lim_n x_n = x_0$ existiert.

Dann hat nach Definition f in x_0 den Grenzwert y_0, falls für <u>jede</u> Folge $(x_n) \subset M$ mit $\lim x_n = x_0$, dass $\lim_n f(x_n) = y_0$ ist.
Sinngemäß kann diese Definition auf $x_0 = \pm\infty$ bzw $y_0 = \pm\infty$ erweitert werden.

25. Beispiel

a) Es sei $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (konstante Funktion), $x_0 \in \mathbb{R}$

Ist $x_n \to x_0$, so ist $f(x_n) = c$ für jedes n, also $\lim\limits_n f(x_n) = c =: y$

b) Ist $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$.

Ist dann $\lim\limits_n x_n = x_0$, so ist auch $\lim\limits_n f(x_n) = \lim\limits_n x_n = x_0 =: y_0$

c) Ist $f(x) = \frac{1}{|x|}, x_0 = 0$. Ist dann $x_n \to 0$, so gilt auch $|x_0| \to 0$,
also $\frac{1}{|x_n|} \to \infty$, d.h. $f(x_n) \to \infty, \lim\limits_n f(x_n) = \infty$

Symbolische Schreibweise für Grenzwerte von Funktionen:

$$\boxed{f \text{ hat in } x_0 \text{ den Grenzwert } y_0 \iff: \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0}$$

In c) ist also

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$$
$$[\text{analog}: \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = 0]$$

d) Ist $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ und $x_0 = 0$,
so hat f in $x_0 = 0$ keinen Grenzwert:

Ist $x_n > 0, x_n \to 0$, so gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

Ist $x_n < 0, x_n \to 0$, so gilt:

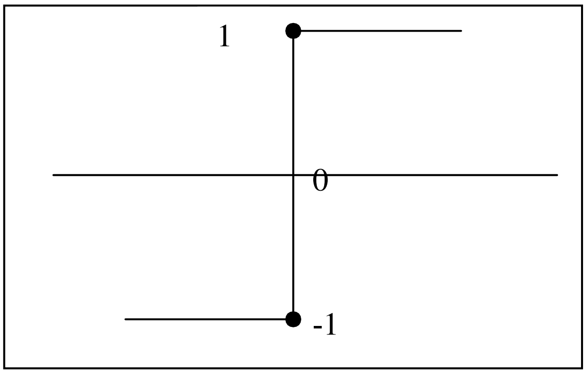
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} (-1) = -1$$

Setzt man z.B. $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, so gilt:

$f(x_n) = -1$, falls n ungerade
und $f(x_n) = 1$, falls n gerade

d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n\right)$ existiert nicht!

Als existiert $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)$ nicht!



e) Es sei $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ für $x\neq 0, x_0=0$

Für $x_n>0, \lim\limits_n x_n=0$, so ist $\lim\limits_n f\left(x_n\right)=\infty$

für $x_n<0, \lim\limits_n x_n=0$, so ist $\lim\limits_n f\left(x_n\right)=-\infty$,

d.h. $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)$ existiert <u>nicht</u>!

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} \begin{matrix} \nearrow -\infty \\ \searrow \infty \end{matrix} \qquad = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x^2}} -1\right)}{x^2\left(\underset{\searrow 0}{\frac{1}{x^2}} +1\right)} = \frac{-1}{1} = -1$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1\to 0}{x-1\to 0} \overset{?}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$

Für Grenzwerte von Funktionen gelten die Rechenregeln analog zu den Grenzwerten von Folgen.

26. Definition

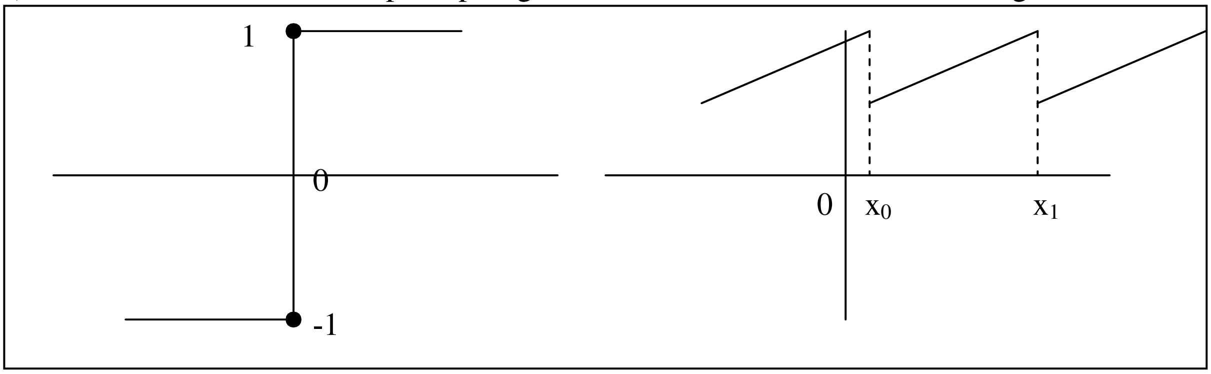
f sei eine Funktion und $x_0\in D\left(f\right)$. f heißt <u>stetig in x_0</u>, falls

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right).$$

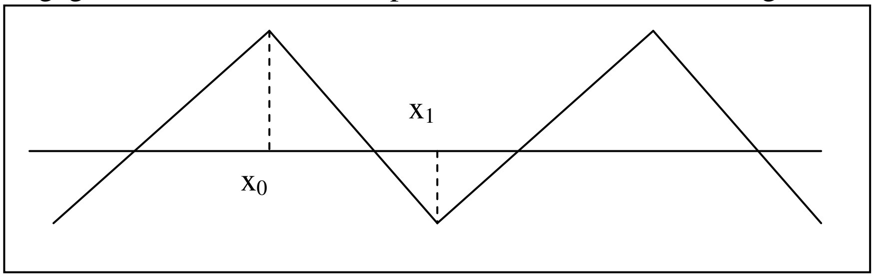
f heißt stetig auf der Menge M, falls f in jedem $x_0\in M$ stetig ist.

27. Beispiele

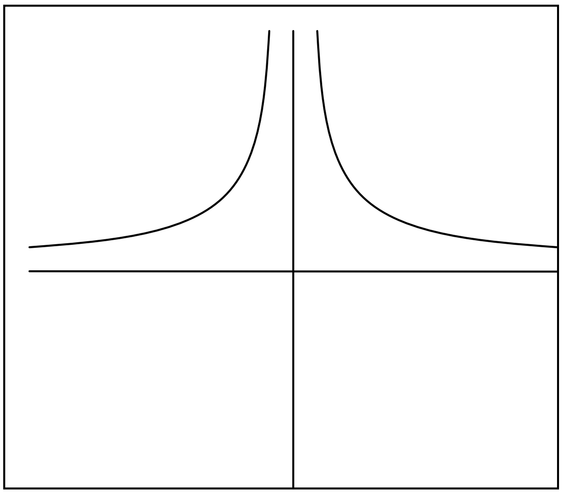
a) Funktionen, deren Graph „Sprungstellen" hat, sind in diesem nicht stetig:



b) Dagegen sind „Ecken" im Graphen kein Hindernis für Stetigkeit

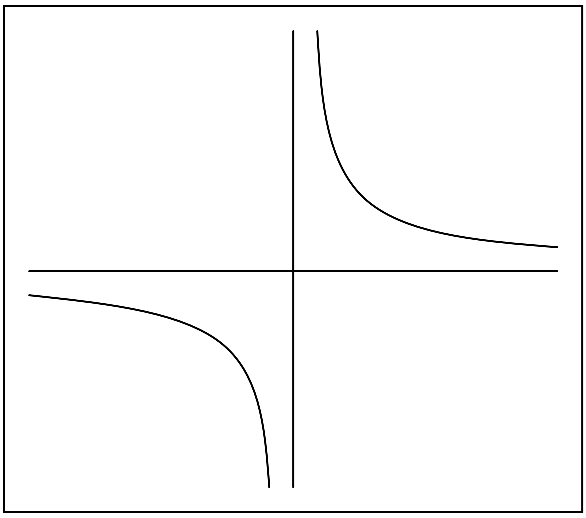


c) In „Unendlichkeitstellen" ist eine Funktion unstetig



$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$



$f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ex. nicht!

d) Stetig sind die konstanten Funktionen und die identische Funktion $f(x) = x$

e) Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten (außerhalb der Nennernullstellen) stetiger Funktionen sind stetig.
Also sind alle Polynome (auf $\mathbb{R}$) und rationale Funktionen (außerhalb der Nennernullstellen) stetig

f) Funktionen, die durch Potenzreihen dargestellt werden, sind ebenfalls stetig.
Also sind

exp, cos, sin, tan(außerhalb der Nullstellen des Cosinus)
cot(" " " " Sinus)
ln (für x > 0)

stetig.

g) Umkehrfunktionen stetiger Funktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich:

ln, Arcusfunktion(=Umkehrfunktion der Winkelfunktion)

2. Differentialrechnung

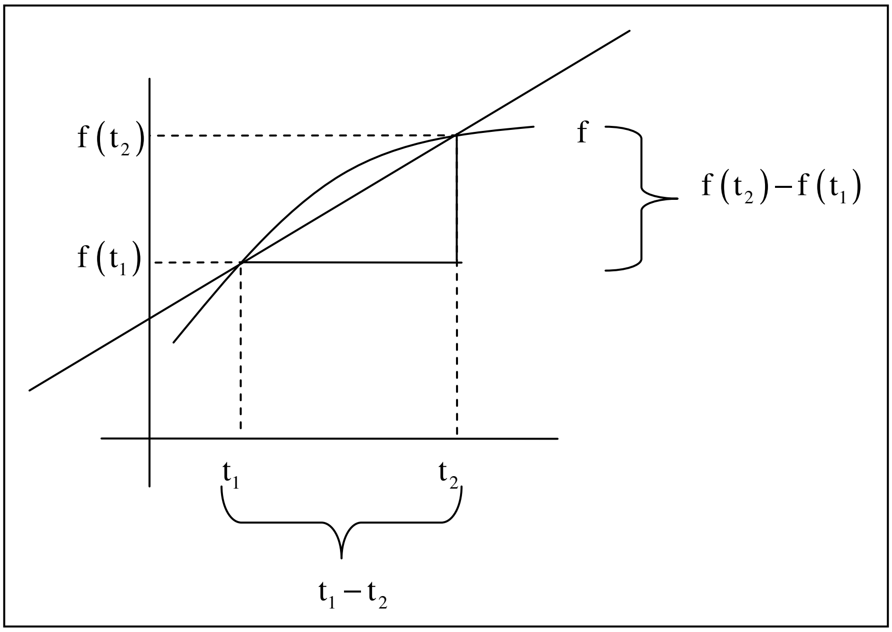
2.1 Die Definition der Ableitung

Die Funktion f beschreibe eine Zeitlich veränderliche Größe $f(t), t = \text{Zeit}$
Dann ist für zwei Zeitpunkte t_1 und t_2

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} \frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}$$

die durchschnittliche Veränderung von f pro Zeiteinheit im Zeitintervall $[t_1, t_2]$

Geometrisch ist $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ die Steigung der Geraden durch die Ebenenpunkte
$(t_1, f(t_1))$ und $(t_2, f(t_2))$



Wählt man t_2 fest, so hängt $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ nur von t_1 ab.
Dann ist:

$$(*) \lim_{t_1 \to t_2} \frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}$$

die momentane Veränderungsgeschwindigkeit von f im Zeitpunkt t_2 (sofern der Grenzwert existiert!)

Achtung: Zähler und Nenner in (*) gehen für $t_1 \to t_2$ gegen 0, falls f stetig ist.

1. Definition

Ist f eine Funktion, $x_0 \in D(f)$, und existiert $f'(x_0) := \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

so heißt f differenzierbar in x_0 und $f'(x)$ die Ableitung von f in x_0.

Setze $D(f') := \{x_0 \mid f \text{ ist differenzeirbar in } x_0\}$.

Dann ist f' definiert auf $D(f')$ und heißt die <u>Ableitung von f</u>. $f': x \to f'(x)$

2. Bemerkung

Setzt man in der Definition von $f'(x_0)$

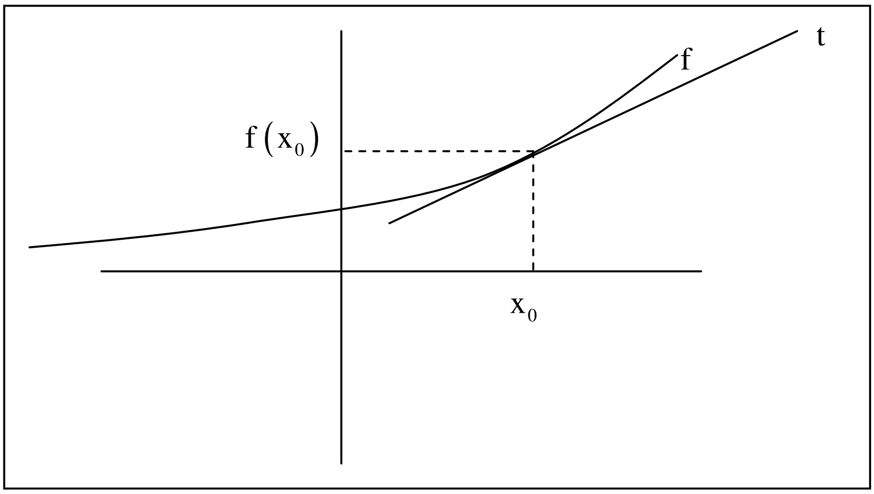
$h := x - x_0$, so ist $x = x_0 + h$ und $\boxed{f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$

3. Konkrete Bedeutung der Ableitung

a) Ist $s(t)$ die Ortskoordinate eines Punktes, die sich auf der Geraden bewegt, zum Zeitpunkt t, so ist $v(t) := s'(t)$ seine Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t.

Ist t die Variable einer Funktion s, so schriebt man oft
$\dot{s}$ statt $s'(t)$: $v = \dot{s}, a = \dot{v} = (\dot{s})^{\cdot} = \ddot{s}$

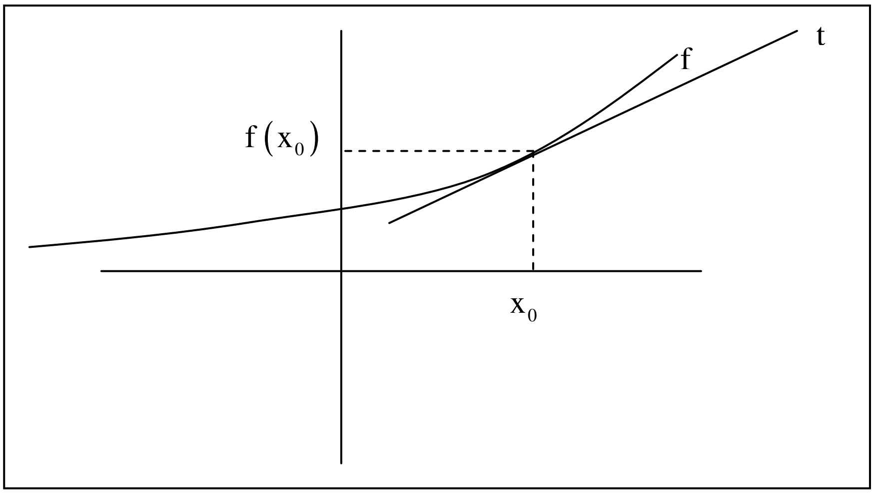
b) $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$



$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist die Tangentengleichung.

3. Konkrete Bedeutungen der Ableitung

b) $f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$:



Definition der Tangente T:

T ist eine Gerade, d.h.

$$t(x) = a + b(x - x_0), \text{ wobei } a = t(x_0) = f(x_0),$$

d.h.

$$t(x) = f(x_0) + b(x - x_0).$$

Ferner soll für die Steigung von T gelten:

$$f'(x_0) = \frac{t(x)-t(x_0)}{x-x_0} = \frac{t(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b$$

Also ist die Steigung der Tangente gegeben durch:

$$\boxed{t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad , x \in \mathbb{R}}$$

4. Schreibweise:

Statt $f'(x)$ schreibt man auch $\frac{df}{dx}(x)$, $\dot{f}$ (falls die Variable die Zeit ist)

5. Beispiele

a) Ist f konstant, $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist für jedes x

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0 \text{ für jedes h,}$$

d.h.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$$

es ist also $f' \equiv 0$

b) Ist $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so ist

$$\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \tfrac{(x+h)-x}{h} = \tfrac{h}{h} = 1 \text{ für alle } h,$$

d.h.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \tfrac{\cdots}{\cdots} = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

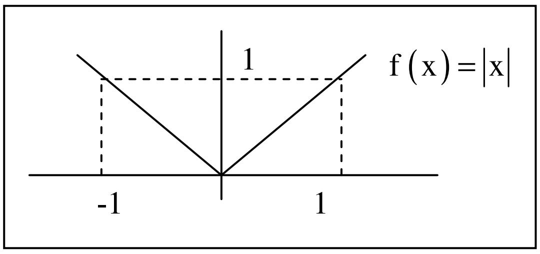
Ist allgemeiner $f(x) = x^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \tfrac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&\overset{\text{bin. Formel}}{=} \tfrac{1}{h}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n\right] \\
&= \tfrac{1}{h}\left[\left(\cancel{x}^n + nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots\right) - \cancel{x}^n\right] \\
&= nx^{n-1} + \underbrace{\binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots}_{\substack{\text{in diesem Summanden} \\ \text{komt h als Faktor vor}}}
\end{aligned}$$

also ist

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0}\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1}, \\ \text{symbolisch: } \left(x^n\right)' = nx^{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{array}}$$

c) Für $f(x) = |x|$ gilt



$$\tfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\Big|_{x=0} = \tfrac{f(h)-f(0)}{h} = \tfrac{f(h)}{h} = \tfrac{|h|}{h}$$

$$= \begin{cases} 1, \text{falls } h > 0 \\ -1, \text{falls } h < 0 \end{cases}$$

Also existiert

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\tfrac{f(h)}{h} \text{ nicht!}$$

f ist also in $x = 0$ nicht differenzierbar

Für $x \neq 0$ ist f differenzierbar und es gilt: $f'(x) = \begin{cases} 1, \text{falls } x > 0 \\ -1, \text{falls } x < 0 \end{cases}$

d) Falls f durch eine Potenzreihe um x_0 gegeben ist, d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \qquad \text{(auf dem Intervall um } x_0\text{)}$$

so ist $a_0 = f(x_0)$ und

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k h^k - f(x_0)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\left[\cancel{a}_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots - \cancel{a}_0\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[a_1 + \underbrace{a_2 h + a_3 h^2 + \ldots}_{\to 0}\right] \\
&= a_1
\end{aligned}$$

Anwenden auf die Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned}
\exp x &= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{x^k}{k!} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\
&= 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \ldots
\end{aligned}$$

Also ist nach den obigen Überlegungen

$$\exp' 0 = 1 = \exp 0.$$

Ist nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist:

$$\begin{aligned}
\exp' x \left(= (\exp x)'\right) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{\exp(x+h) - \exp x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\left[\exp x \bullet \exp h - \exp x\right] \\
&= \exp x \underbrace{\lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\left(\exp h - 1\right)}_{\exp' 0 = 1} \\
&= \exp x
\end{aligned}$$

$$\boxed{\exp' x = \exp \text{für alle } x \in \mathbb{R}}$$

e) Ableitung von Sinus und Cosinus:

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{1}{h}\left[\sin x \bullet \cos h + \sin h \bullet \cos x - \sin x\right]$$
$$\frac{1}{h}\left[\sin x\left(\cos h - 1\right) + \cos x \bullet \sin h\right]$$
$$= \sin x \bullet \underline{\frac{1}{h}\left(\cos h - 1\right)} + \cos x \bullet \underline{\frac{\sin h}{h}}$$

Es ist $\cos h = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k}}{(2k)!}$
$= 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} \mp \ldots,$

also $\frac{1}{h}\left(\cos h - 1\right) = -\frac{h}{2!} + \frac{h^3}{4!} \mp \ldots \to 0 \text{ für } h \to 0$
und es ist

$$\sin h = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$= h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} \mp \ldots$$

also $\frac{\sin h}{h} = 1 - \frac{h^2}{3!} + \frac{h^4}{5!} \mp \ldots \to 1 \text{ für } h \to 0$

Folglich ist

$$\sin' x = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Analog:

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{1}{h}\left[\cos x \bullet \cos h - \sin x \bullet \sin h\right]$$
$$= \cos x \bullet \underbrace{\frac{1}{h}\left(\cos h - 1\right)}_{\substack{\to 0 \\ h \to 0}} - \sin x \bullet \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\substack{\to 1 \\ h \to 0}}$$

d.h.

$$\cos' x = \lim_{h \to 0} \frac{\cdots}{\cdots} = -\sin x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

6. Satz

Ist f differenzierbar in einem Punkt x, so ist f auch stetig in x.
(Es gibt aber stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind: $f(x) = |x| \text{ in } x = 0$)

$f(x) = x^2 \bullet e^{\sin(2x-5)}$

$f'(x) = ?$

2.2 Ableitungsregeln, die Ableitungen der elementaren Funktionen

1. Satz

f und g seien im Punkt x differenzierbar. Dann sind auch $f \pm g$, $f \bullet g$ und (falls $g(x) \neq 0$) $\frac{f}{g}$ in x differenzierbar:

$$\boxed{(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)}$$

$$\boxed{(f \bullet g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ (Produktregel)}}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad \text{(Quotientenregel)}}$$

Für $f(x) \equiv 1$ ergibt die Quotientenregel der Spezialfall

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'x = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}}$$

Beweis:

Summe und Differenz:

$$\frac{1}{h}\left[(f+g)(x \pm h) - (f \pm g)(x)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\underbrace{f(x+h) - f(x)}_{f'(x)} \pm \underbrace{(g(x+h) - g(x))}_{g'(x)}\right]$$

also $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Produkt:

$$\frac{1}{h}\left[(f \bullet g)(x+h) - (f \bullet g)(x)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)g(x+h) - (f \bullet g)(x)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\xrightarrow{h \to 0} f'(x)} \bullet \underbrace{g(x+h)}_{\xrightarrow{h \to 0} g(x)} + \underbrace{f(x)}_{f(x)} \bullet \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\xrightarrow{h \to 0} g'(x)}$$

$$= (f \bullet g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Ableitung von $\frac{1}{g}$:

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{g}(x+h) - \frac{1}{g}(x)\right] = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right]$$

$$= \frac{1}{h} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h) \bullet g(x)}$$

$$= -\underbrace{\frac{1}{h}(g(x+h) - g(x))}_{\xrightarrow{h \to 0} g'(x)} \bullet \underbrace{\frac{1}{g(x+h) \bullet g(x)}}_{\to \frac{1}{(g(x))^2}}$$

also ist

$$\left(\tfrac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

Quotient:

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f \bullet \tfrac{1}{g}\right)'(x) \\ &\overset{\text{Produkt-}}{\underset{\text{regel}}{=}} f'(x)\bullet\tfrac{1}{g}(x) + f(x)\bullet\left(\tfrac{1}{g}\right)'(x) \\ &= f'(x)\bullet\tfrac{1}{g}(x) - f(x)\bullet\frac{g'(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{f'(x)\bullet g(x) - f(x)\bullet g'(x)}{g(x)^2}\end{aligned}$$

2. Beispiele (Anwendungen der Ableitungsregeln)

1. Ist p ein Polynom, $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, so ist p differenzierbar für jedes $x \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned}p'(x) &= (a_0)' + (a_1x)' + ... + (a_nx^n)' \\ &= 0 + a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1}\end{aligned}$$

2. $\left(\frac{1}{x^m}\right)' = ?\quad m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^m} &\overset{g(x)=x^m}{=} -\frac{mx^{m-1}}{(x^m)^2} \qquad \left(= \frac{g'(x)}{g(x)^2}\right) \\ &= -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} \\ &= -m\bullet\frac{1}{x^{2m-m+1}} \\ &= -m\bullet\frac{1}{x^{m+1}}\end{aligned}$$

Das ist ganz analog zur Ableitungsregel für positive Potenzen von x:

$$\underline{(x^{-m})'} = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = m\frac{1}{x^{m+1}} = \underline{-m\bullet x^{-m-1}}$$

Es ist also

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0}$$

3. $f(x) = x^2 e^x$

Produktregel:

$$\begin{aligned}(x^2e^x)' &= (x^2)'e^x + x^2(e^x)' \\ &= 2xe^x + x^2e^x \\ &= (2x + x^2)e^x\end{aligned}$$

4. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Quotientenregel:

$$\begin{aligned}\tan' x = \left(\tfrac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \tfrac{\sin' x \bullet \cos x - \sin x \bullet \cos' x}{\cos^2 x} \\ &= \tfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\left(1 + \tan^2 x\right) \text{oder } \tfrac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} x = \left(\tfrac{\cos x}{\sin x}\right)' \\ &= \tfrac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{\sin^2 x} \\ &= \tfrac{-\mathrm{som}^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \begin{cases} -\tfrac{1}{\sin^2 x} \\ -\left(1 + \operatorname{ctg}^2 x\right)\end{cases}\end{aligned}$$

Kettenregel: Ableitung von Funktionen, die durch Komposition „einfacher“ Funktionen erstehen.

z.B. $h(x) = e^{2x^2}$:

$$x \to x^2 \to 2x^2 \to e^{2x^2}$$

$$h(x) = f(g(x)) \text{ mit } g(x) = 2x^2$$
$$\text{und } f(y) = e^y$$

Zerlegung i. a. nicht eindeutig:

$$h(x) = e^{2x^2} = \left(e^{x^2}\right)^2:$$

$$x \to x^2 \to e^{x^2} \to \left(e^{x^2}\right)^2$$

$$h(x) = g\left(f\left(g(x)\right)\right) \text{mit}\, g(x) = x^2$$

$$\text{und}\, f(y) = e^y$$

$$\text{mit}\, g(x) = z^2$$

Dafür gilt

3. Satz (Kettenregel):

Ist g differenzierbar an de Stelle x mit f an der Stelle $g(x)$, so ist

$$h(x) := f\left(g(x)\right)$$

differenzierbar an der Stelle x und

$$h'(x) = f'\left(g(x)\right) \bullet g'(x)$$

Beweis: Nach Definition der Ableitung ist

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{s\to 0} \frac{h(x+s)-h(x)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{f(g(x+s))-f(g(x))}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \left(\frac{f(g(x+s))-f(g(x))}{g(x+s)-g(x)} \bullet \frac{g(x+s)-g(x)s}{s} \right) \\ &= \underbrace{\lim_{y_1\to y_2} \frac{f(y_1)-f(y_2)}{y_1-y_2}}_{f'(y_2)=f'(g(x))} \bullet \underbrace{\lim_{s\to 0} \frac{g(x+s)-g(x)}{s}}_{g'(x)} \end{aligned}$$

Kettenregel für mehr als 2 Funktionen, z.B.

$$\begin{aligned} k(x) &= h\left(g\left(f(x)\right)\right): \\ &= (h \circ g)\left(f(x)\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} k'(x) &= (h \circ g)'\left(f(x)\right) \bullet f'(x) \\ &= h'\left(g\left(f(x)\right)\right) \bullet g'\left(f(x)\right) \bullet f'(x) \end{aligned}$$

4. Beispiele

1. $e^{2x^2} = f\left(g(x)\right) \text{mit}\, g(x) = 2x^2, f(y) = e^y$

$$\begin{aligned} \left(e^{2x^2}\right)' &= e^y \Big|_{y=2x^2} \bullet 4x = 4x \bullet e^{2x^2} \\ &= e^{2x^2} \bullet 4x \end{aligned}$$

oder

$$e^{2x^2} = \left(e^{x^2}\right)^2 = g\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right) \text{mit}\, g\left(x\right) = x, f\left(y\right) = e^y, g\left(z\right) = z^2$$

$$\begin{aligned} e^{2x^2} &= 2z\Big|_{z=e^{x^2}} \bullet e^y\Big|_{y=x^2} \bullet 2x \\ &= 2e^{x^2} \bullet e^{x^2} \bullet 2x \\ &= 4x \bullet e^{x^2} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} Ae^{\lambda(x-x_0)}\,' &= A \bullet e^y\Big|_{y=\lambda(x-x_0)} \bullet \left(\lambda\left(x-x_0\right)\right)' \\ &= Ae^{\lambda(x-x_0)} \bullet \lambda \\ &= A\lambda e^{\lambda(x-x_0)} \end{aligned}$$

für $f\left(x\right) = Ae^{\lambda(x-x_0)}$ f gilt also

$$f'\left(x\right) = \lambda f\left(x\right) \text{für alle}\, x \in \mathbb{R}$$

lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

5. Satz (Ableitung von Umkehrfunktionen)

Ist g die Umkehrfunktion zur Funktion f und differenzierbar in $g\left(x\right)$, so ist

$$g'\left(x\right) = \frac{1}{f'\left(g\left(x\right)\right)} \quad (\text{falls Nenner} \neq 0)$$

Achtung!!!

Beweis: Es ist $f\left(g\left(x\right)\right) = x$, also ist

$$f\left(g\left(x\right)\right)' = \left(x\right)' = 1$$

$$f'\left(g\left(x\right)\right) \bullet g'\left(x\right)$$

Falls $f'\left(g\left(x\right)\right) \neq 0$, folgt

$$g'\left(x\right) = \frac{1}{f'\left(g\left(x\right)\right)}$$

6. Beispiele

1. $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Ente Wurzel
Ente Potenz

g ist die Umkehrfunktion zu f,

$f(y) = y^n$ Es ist $f'(y) = ny^{n-1}$

Also ist

$$\begin{aligned} g'(x) = \left(\sqrt[n]{x}\right)' &= \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' \\ &= \frac{1}{ny^{n-1}\Big|_{y=x^{\frac{1}{n}}}} \\ &= \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{|n-1|}} \\ &= \frac{1}{bx^{1-\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{1}{n} \bullet x^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

also $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \bullet x^{\frac{1}{n}-1}$ analog zur Ableitung für ganzzahlige Potenzen

Beispiel:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' &= \tfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \\ &= \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2. $g(x) = \ln x, x > 0$: g ist die Umkehrfunktion zu f, $f(y) = e^y$

$e^{\ln x} = x$ für $x > 0$
$\ln(\exp x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{(\ln x)' = \tfrac{1}{x}}$$

Es ist $f'(y) = e^y$, also gilt:

$$(\ln x)' = g'(x) = \frac{1}{e^y\big|_{y=\ln x}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

7. Definition:(Höhere Ableitungen)

Ist die Ableitung f' die Funktion f wieder differenzierbar, so heißt
$$f'' := (f')'$$
die zweite Ableitung von f Rekursiv:

$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$ heißt die n-te Ableitung von f . Dabei ist $f^{(0)} := f$ zu setzen.

8. Beispiele:

a)
$$\sin' x = \cos x$$
$$\sin'' x = \cos' x = -\sin x$$
$$\sin^{(3)} x = -\sin' x = -\cos x$$
$$\sin^{(4)} x = -\cos' x = \sin x$$

zyklische Wiederholung ab der 5. Ableitung
(Analog für den Cosinus)

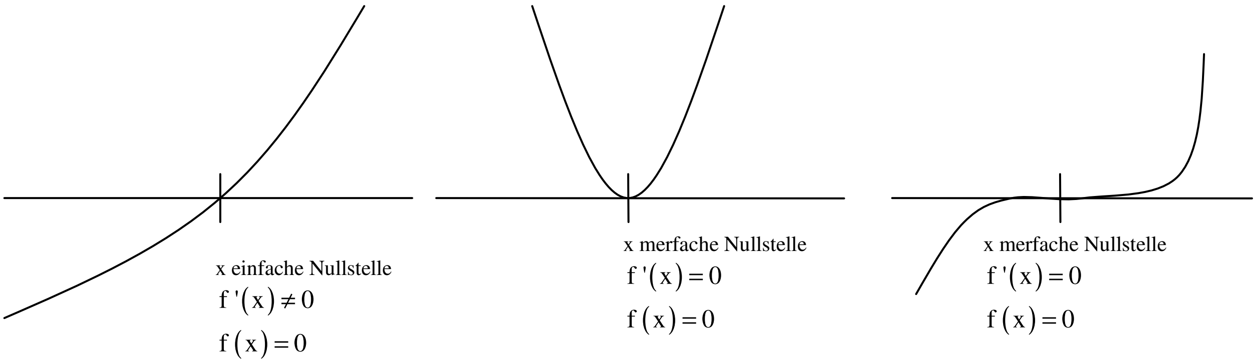
b)
$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1} \qquad n \in \mathbb{N}$$
$$\left(x^n\right)'' = n\left(x^{n-1}\right)'$$
$$= n\left(n-1\right)x^{n-2}$$
$$\left(x^n\right)^{(n)} = n\left(n-1\right)...2\bullet 1\bullet x^0$$
$$= n!$$
$$\left(x^n\right)^{(k)} = 0 \text{ für } k > n$$

Also gilt: Ist p ein Polynom mit grad p = n, so ist $p^{(k)} = 0$ für alle $k > n$

2.3 Nullstellenbestimmung und Auflösen von Gleichungen mit einer Unbekannten

x heißt Nullstelle der Funktion f, falls $f(x)=0$
(z.B. hat die Exponentialfunktion keine Nullstelle!)

Eine Nullstelle x heißt <u>einfach</u>, falls $f'(x)\neq 0$, und <u>mehrfach</u>, falls $f'(x)=0$.



Nullstellen von f bestimmt man also, indem man die Gleichung $f(x)=0$
„nach x auflöst“. Konkret ist das in wenigen Fällen direkt möglich (z.B. guadr. oder lin. Gleichungssystem)
In den meisten Fällen, kann man nur Näherungen für x bestimmen, diese aber mit jeder gewünschten Genauigkeit.
Ist also x die gesuchte Nullstelle, und $\varepsilon>0$ eine Fehlerschranke, z.B. $\varepsilon=10^{-k}$ für ein $k\in\mathbb{N}$, so kann man die Näherung $\tilde{x}$ für x gewinnen, mit $|\tilde{x}-x|<\varepsilon$

Nullstellenbestimmung <=> Lösen von Gleichungen (in einer Unbekannten:

$$h(x)=g(x)[x^2\sin x=5\cos x]$$

Setze $f(x)=h(x)-g(x)$ Dann gilt:

$$f(x)=0 \iff h(x)=g(x)$$

Falls man eine Methode hat, Nullstellen beliebiger Funktionen zu bestimmen, kann man auch beliebige Gleichungen lösen.

1. Beispiel Es soll die Gleichung $e^x - 2 = \sin x$ gelöst werden.

Nicht durch direkte Umformungen lösbar!!!

Setze also

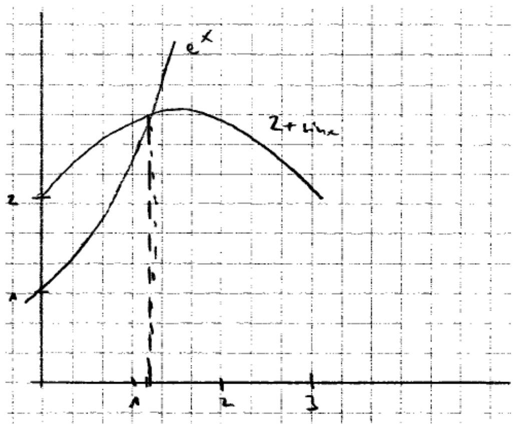
$$f(x) = e^x - 2 - \sin x$$

und bestimme die Nullstellen von f.

<u>zwei Schritte:</u>

a) Grobe Eingrenzung der Nullstelle(n) und Überblick über die Anzahl der Nullstellen.

z.B. durch eine Skizze



Offenbar gibt es nur eine Lösung x und es ist $x \in [1, 2]$

Dann kann man eine Wertetabelle machen für f auf [1,2] machen.

$$\vdots$$
$$f(1) = -0,12...$$
$$f(1,1) = 0,11...$$
$$\vdots$$

Also ist $x \in [1,0\ \ ,1,1]$
Durch systematische Tabellieren kann man sukzessive höhere Genauigkeiten erzielen:

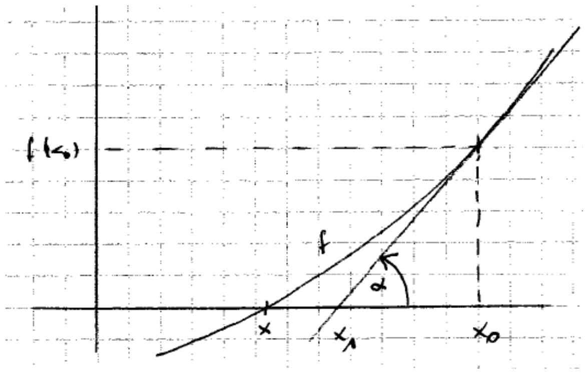
$$f(1,05) = -0,00977...$$
$$f(1,06) = 0,014...$$

also $x \in [1,05\ \ ,\ 1,06]$

Sehr langsamer Gewinn an Genauigkeit!

b) schneller geht es im allgemeinen mit dem
Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung.

Man sich eine (mehr oder weniger grobe) Anfangsnäherung (wie unter a)
x_0 für die gesuchte Nullstelle.



Tangente an f in x_0

Berechnung von x_1 als (verbesserte?) Näherung für x

$$f'(x_0) = \tan\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$\uparrow$ $\uparrow$

Steigung von T

=>
$$x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Wiederholung dieses Schritts führt zum sog. Newton-Verfahren:

x_0 = Anfangsnäherung für x

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0,1,2,...$

(iteratives Verfahren: Eine Rechenvorschrift wird jeweils mit dem Ergebnis des vorhergehenden Schrittes wiederholt.)

f sei eine Funktion, x eine Nullstelle von f.

d.h. $f(x) = 0$

Gesucht ist x.

2 Schritten:

1. Bestimme eine „Anfangsnäherung“ x_0 zu x.
2. Verbessere (?) diese Näherung x_0 mit dem Newton-Verfahren:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , n = 0,1,2,...$$

$$x_0 \to x_1 \to x_2 \to \ldots$$

Falls die Anfangsnäherung x_0 hinreichend nahe bei x gewählt wird, konvergiert die Folge x_n gegen x

Falls x eine einfache Nullstelle ist, also $f'(x) \neq 0$,

ist $|x_{n+1} - x|$ proportional ist zu $|x_n - x|^2$

d.h., die Anzahl der richtigen Stellen, die x_{n+1} enthält, ist etwa doppelt so groß, wie die der richtigen Stellen in x_n.

Praktisch verfährt man so:

Man bestimmt so viele Näherungen, bis x_{n+1} und x_n auf die gewünschte Stellenzahl übereinstimmen und bricht dann das Verfahren ab.

Im obigen Beispiel

$$f(x) = e^x - 2 - \sin x$$

liegt die (einzige) Nullstelle im Intervall [1.0,1.1].

Wähle z.B. $\underline{x_0 := 1}$.
Das Newton-Verfahren hat die Form:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{e^{x_n} - 2 - \sin x_n}{e^{x_n} - \cos x_n} \end{aligned}$$

Das ergibt die Näherungswerte

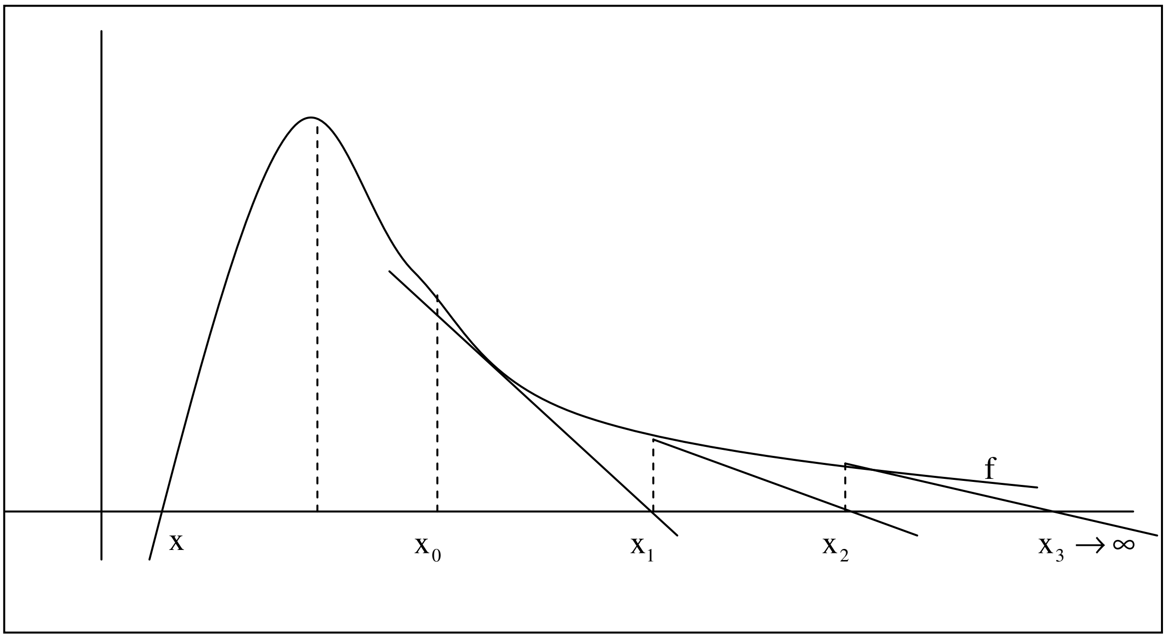
n	x_n
0	1
1	1.056561210
2	1.054131776
3	1.054127124
4	1.054127124

„____ “ = sichere Stellen

Also liegt die Nullstelle von f bei x=1.054127124

Bei zu schlechter Anfangsnäherung kann der Fall auftreten, dass x_n nicht konvergiert

Beispiel:



Wie erkennt man das? Keine Stabilisierung von Stellen in der Folge von $(x_n)_n$.
Stop und suche nach einer besseren Anfangsnäherung (z.B. durch feineres Tabellieren von f)

Falls $(x_n)_n$ konvergiert, ist $\lim_n x_n$ eine Nullstelle von f:

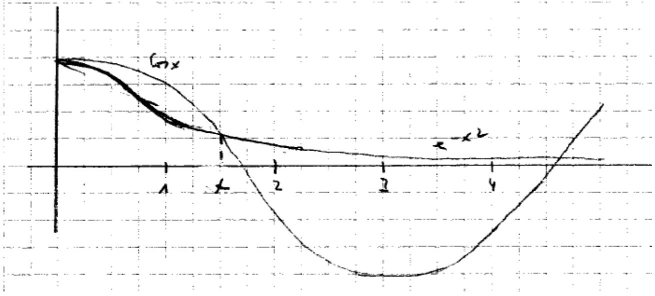
$$\underbrace{x_{n+1}}_{\to x} = \underbrace{x_n}_{\to x} - \underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\to \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

d.h. $x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, also $\frac{f(x)}{f'(x)} = 0, f(x) = 0$

Aber: $\lim_n x_n$ muss nicht die gesuchte Nullstelle sein.

2. Beispiel:

gesucht ist die kleinste positive Lösung der Gleichung: $e^{-x^2} = \cos x$.



$e^{-x^2} = \cos x$ hat unendlich viele Lösungen, die kleinste positive liegt im Intervall [1,2].

Anfangsnäherung:

Tabellieren von $f(x) = e^{-x^2} - \cos x$ im Intervall [1,2]

$$f(1.5) \approx 0.03$$
$$f(1.4) \approx -0.03$$

Wähle z.B. $\underline{x_0 = 1.45}$

Newton-Verfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} \bullet (-2x) = -2xe^{-x^2}$$

$$= x_n - \frac{e^{-x_n^2} - \cos x}{-2x_n e^{x_n^2} + \sin x}$$

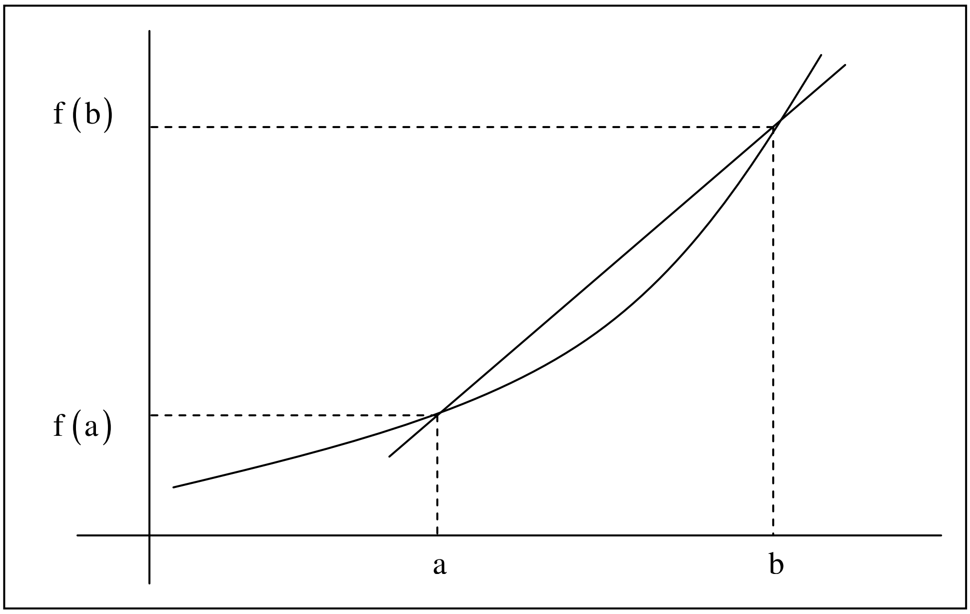
Das liefert die Näherungen:

n	x_n
0	1.45
1	1.447419010
2	1.447414271
3	1.447414271

Also ist die gerundete Nullstelle von f: $x = 1.447414271$
(ggf. bis auf einen Rundungsfehler in der letzten Stelle)
Wenn man weitere Nullstellen von f bestimmen will. muss man die Anfangsnäherung jeweils in deren Nähe suchen.

2.4 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung und einige Anwendungen

Der Mittelwertsatz (MWS) der Differentialrechnung hat eine einfache geometrisch anschauliche Aussage.



Die Steigung der Geraden G durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist durch

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

gegeben.

Dann gibt es einen Punkt $t \in]a,b[$, so dass die Tangente T an f in $(t, f(t))$ parallel ist zu G, d.h. die Steigungen von G und T stimmen überein. Die Steigung von T ist aber $f'(t)$.

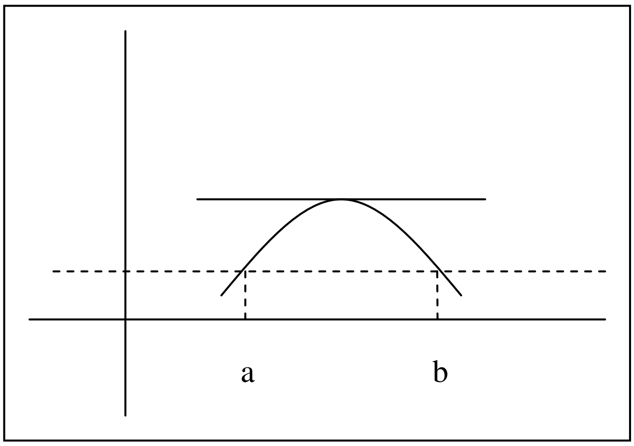
1. Satz (MWS der Differentialrechnung)

Ist f differenzierbar auf [a,b], so gibt es ein $t \in]a,b[$ mit $f'(t) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,
(bzw. $f'(t)(b-a) = f(b) - f(a)$)

Die „Zwischenstelle“ t ist i.a. weder eindeutig bestimmt und leicht zu berechnen.

Wichtig: a und b können durch beliebige Punkte $x, y \in [a,b]$ ersetzt werden, denn dann gilt der MWS auf [x,y]

2. Satz (Satz von Rolle)



Ist f differenzierbar auf [a,b] und $f(a)=f(b)$, so gibt es ein $t\in]a,b[$, so dass $f'(t)=0$ ist

Beweis:

Setze im MWS $f(b)=f(a)$

Sind f und g zwei Funktionen, differenzierbar auf [a,b]
so gibt es ein $t_1 \in]a,b[$ mit

$$f'(t_1)(b-a)=f(b)-f(a)$$

und ein $t_2 \in]a,b[$ mit

$$g'(t_2)(b-a)=g(b)-g(a)$$

Dann ist

(*) $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(t_1)}{g'(t_2)}$$

Der erweiterte MWS der Differentialrechnung sagt, dass man in (*) $t_1=t_2$ wählen kann:

3. Satz

Sind f und g differenzierbar auf [a,b], so dass es ein $t\in]a,b[$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}$$

4. Anwendungen

a) Falls bekannt ist, dass für die Funktion f gilt:

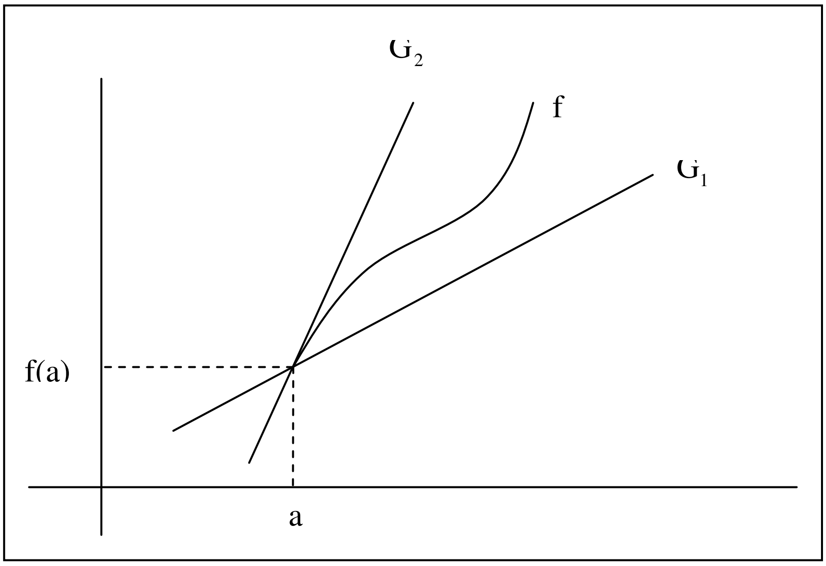
$$m \le f'(t) \le M$$

für alle $t \in [a,b]$, so gilt für jedes $x \in [a,b]$

$$f(x) - f(a) = f'(t) \cdot (x-a) \qquad (t \in]a,x[)$$

also gilt

$$f(a) + m(x-a) \le f(x) \le f(a) + M(x-a)$$



$G_1 : y = f(a) + m(x-a) \quad (x \ge a)$
$G_2 : y = f(a) + M(x-a)$

b) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$, so ist f konstant.

<u>Beweis mit MWS:</u> $x \in [a,b]$

$$f(x) - f(a) = \underbrace{f'(t)}_{=0}(x-a) \qquad (t \in [a,x])$$

also ist $f(x) = f(a)$ für alle $x \in [a,b]$

c) Die Regel von l'Hôpital:

Falls $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (oder $= \infty$),
so kann

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ \underline{nicht} in der Form } \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$

berechnet werden („$\frac{0}{0}$"- bzw „$\frac{\infty}{\infty}$"-Situation)

Sei zunächst $\underbrace{\lim\limits_{x\to a} f(x)}_{=f(a)} = \underbrace{\lim\limits_{x\to a} g(x)}_{=g(a)} = 0$

Dann ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \overset{\text{erw.}}{\underset{\text{MWS}}{=}} \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad (t \in]a, x[)$$

Falls also $\lim\limits_{t\to a} \frac{f'(t)}{g'(t)}$ existiert, so existiert auch

$$\lim_{t\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

und beide sind gleich.

Analog für $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$

4'Satz (Regel von l'Hôpital)

Es sei $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (oder $= \pm\infty$)

Falls dann $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so ist

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(gilt auch, wenn $a = \pm\infty$ ist!)

5. Bemerkungen und Beispiele:

a) Regel darf nur in $\frac{0}{0}$ – bzw $\frac{\infty}{\infty}$ – Situationen angewandt werden, sonst i.a. falsche Ergebnisse!

b) Zähler und Nenner werden getrennt abgeleitet, nicht etwa $\frac{f}{g}$ nach der Quotientenregel

c) Gesucht ist $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x}{e^x-1}$

$\lim\limits_{x\to 0} xe^x = 0 \cdot 1 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} e^x - 1 = 1 - 1 = 0$

Für $f(x) = xe^x$ ist $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

für $g(x) = e^x - 1$ ist $g'(x) = e^x$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(x+1)e^x}{e^x} = x+1 \xrightarrow{x\to 0} 1$$

Also ist auch

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{e^x-1} = 1$$

5. Bemerkungen und Beispiel: (zur Regel von l'Hôpital)

Falls für $\frac{f}{g}$ in a eine $\frac{0}{0}$ – Situation vorliegt, gilt:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$, falls rechte Grenzwert existiert.

d) Manchmal muss man die Regel mehrfach anwenden um von der undefinierten Situation wegzukommen:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \infty$$

e) „$0 \cdot \infty$"-Situationen kann man auf „$\frac{0}{0}$"- oder „$\frac{\infty}{\infty}$"-Situationen zurückführen und dann ggf. mit l'Hôpital versuchen, den Grenzwert zu bestimmen.

Beispiel:

$\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$ (rechtseitiger Grenzwert)

$$\lim_{x\to 0}\overbrace{x}^{\to 0}\overbrace{\ln x}^{\to -\infty} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\ln x}^{\to -\infty}}{\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to\infty}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \quad [(x^{-1})' = (-1)x^{-2}]$$

$$= \lim_{x\to 0}(-x)$$

$$= 0$$

oder:

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\to 0}} \qquad\qquad \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{-\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\overbrace{x}^{\to 0}\overbrace{(\ln x)}^{\to\infty}{}^2$$

$$= ?$$

Eine weitere Anwendung des Mittelwertsatzes ist die Untersuchung der Fortpflanzung von Datenfehlern:

Es soll für eine gegebene Funktion f der Funktionswert $f(t)$ berechnet werden, wobei t ein Messwert ist. Ist statt t ein fehlerhafter Wert $\tilde{t}$ ermittelt, so möchte man vorhersehen, wie stark sich $f(t)$ und $f(\tilde{t})$ unterscheiden.

$\Delta t = \tilde{t} - t$ heißt der absolute Fehler

$\frac{\Delta t}{t}\left(\text{bzw.}\frac{\Delta t}{\tilde{t}}\right)$ heißt der relative Fehler (Datenfehler)

entsprechend:

$\Delta f = f(t) - f(\tilde{t}) = f(t+\Delta t) - f(t)$ heißt der absolute und

$\frac{\Delta f}{f(\tilde{t})}$ der relative Fehler, den $\tilde{t}$ im Ergebnis von $f(t)$ bewirkt.

Nach dem Mittelwertsatz ist:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f'(t+\Delta t) - f(t)\\ &= f'(s)\bullet(t+\Delta t - t)\\ &= f'(s)\bullet\Delta t \text{ mit einem } s\in[t, t+\Delta t]\end{aligned}$$

also

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f'(s)\bullet\Delta t}{\underbrace{f(t)}_{[f(\tilde{t})]}}$$

Ist Δt klein, kann man statt $f'(s)$ die Ableitung $f'(t)$ benutzen, d.h.

$$\boxed{\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{f'(t)}{f(t)} \bullet \Delta t}$$ Formel für die Fortpflanzung des relativen Messfehlers

Beispiel:

Es sei $f(t) = ct^k \quad, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$

Dann ist:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\Delta f}{f} &\approx \frac{k\cancel{c}t^{k-1}}{\cancel{c}t^k} \bullet \Delta t \\ \frac{\Delta f}{f} &\approx k \bullet \frac{\Delta t}{t} \end{aligned}}$$

z.B. für <u>k = 2</u>: $f(t) = ct^2$

$$\frac{\Delta f}{f} = 2 \bullet \frac{\Delta t}{t}$$

Analoge Rechnung auch für gebrochene Potenzen:

z.B. für $k = \frac{1}{2}$

$$f(t) = c\sqrt{t}$$

$$\boxed{\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2} \bullet \frac{\Delta t}{t}}$$ Fehlerdämpfung

<u>Anwendung:</u>

Die Schwingungsdauer T eines sog. „mathematischen Pendels“ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \bullet \sqrt{\frac{L}{g}} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{L} \end{aligned}$$

(l = Länge des Pendels, g = Erdbeschleunigung)

$$\begin{aligned} T(L) &= c\sqrt{L} \\ &= cL^{\frac{1}{2}} \qquad c = \text{konstant} \end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L}$$

Wird also L mit einem Fehler von höchstens 5% gemessen, so ist die daraus berechnete Schwingungsdauer höchstens um $2\frac{1}{2}\%$ verfälscht.

2.5 Kurvendiskussion

Gegeben sei eine Funktion f. Welche Hilfsmittel dienen dazu, ein realistisches Bild des Graphen von f zu gewinnen.

Dazu gehören:

- Nullstellen
- Monotonieverhalten
- Krümmung
- Wendepunkte
- Extremalstellen (Maximum- und Minimumstellen)
- Sattelpunkte
- Unendlichkeitsstellen
- Verhalten im Unendlichen (Asymptoten)

a) Nullstellen:

entweder direkt berechnen oder mit einem Näherungsverfahren (z.B Newton-Verfahren)

b) Monotonie:

f wächst (fällt) monoton auf dem Intervall I

<=> Für alle $x, y \in I$ gilt:

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

f wächst (fällt) streng monoton auf I

$$:\Leftrightarrow x < y \Rightarrow f(x) \underset{>}{<} f(y)$$

Dann gilt:
Ist $f'(x) \underset{\leq}{\geq} 0$ für alle $x \in I$, so $\underset{\text{fällt}}{\text{wächst}}$ f monoton, denn es gilt nach dem MWS:

$$f(x) - f(y) = f'(t)(x - y) \text{ mit einem } t \in [x, y]$$

Ist also $f'(t) \geq 0$, so haben $x - y$ und $f(x) - f(y)$ das gleiche Vorzeichen , d.h.

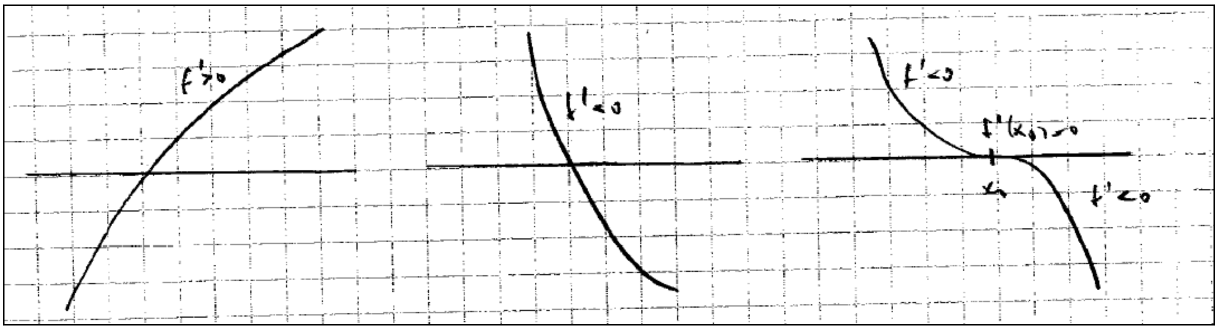
$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

ist aber

$$f'(t) \leq 0, \text{ so gilt } \quad x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

Analog: Ist $f'(x) \underset{(<0)}{>} 0$ für alle $x \in I$, so ergibt sich die strenge Monotonie von f.

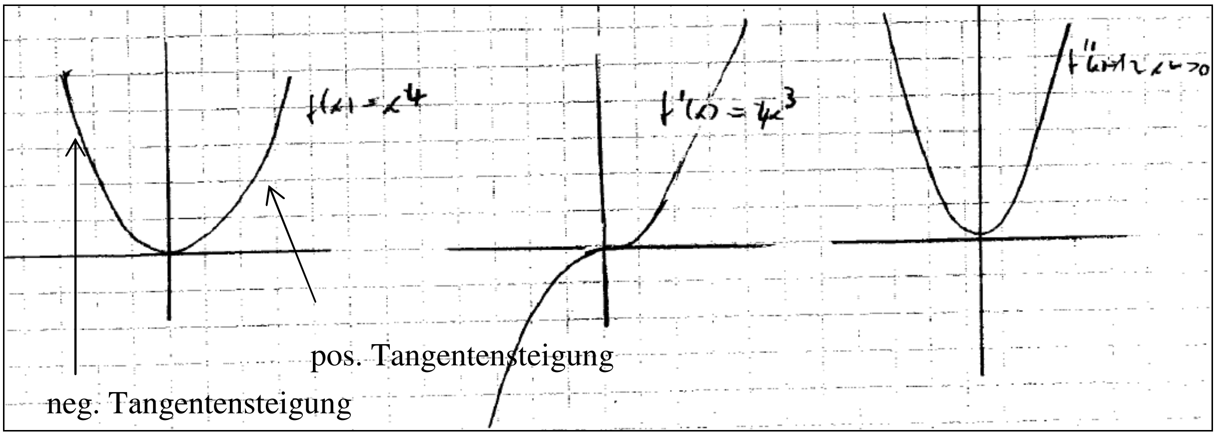
Ist $f'(x) = 0$ für <u>ein</u> $x \in I$, aber $f' > 0$ ansonsten auf I, o wächst f auch streng monoton auf I: f wäscht links von x und rechts von x.



c) Krümmung, Wendepunkte:

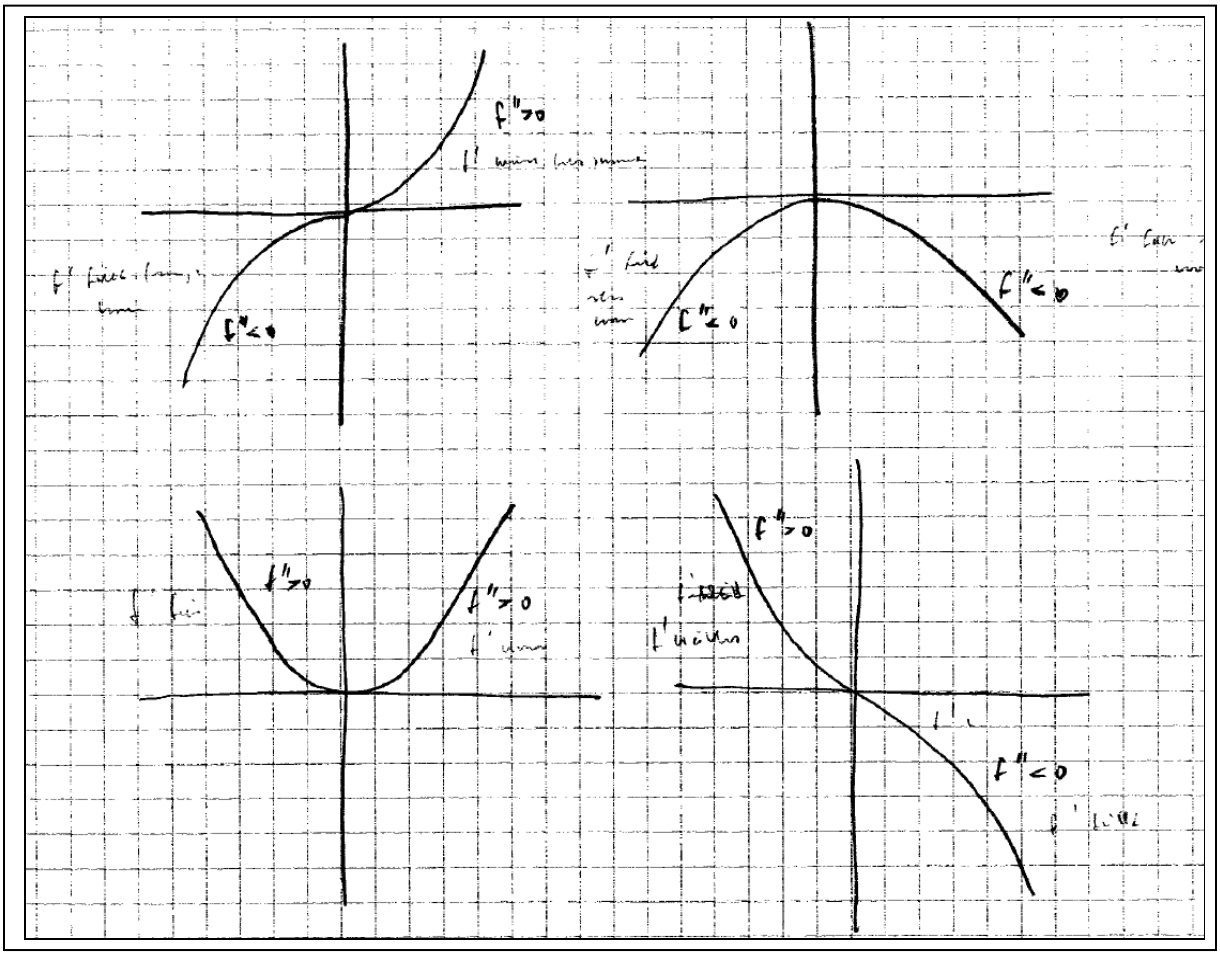
Ist f zweimal differenzierbar, so ist $f'' = (f')'$, d.h. f'' gibt die Steigung von f' an.

Ist also $f'' > 0$, so wächst f' streng monoton. Das bedeutet, dass die Tangentensteigung (von links nach rechts) wächst, der Graph der Funktion f ist also wie in der Skizze gekrümmt.



$f'' \underset{>}{\geq} 0 \Rightarrow f'$ wächst streng monoton.

In einem Intervall mit wachsender Ableitung spricht man von positiver Krümmung. $(f'' > 0)$
bei fallender Ableitung spricht man von negativer Krümmung $(f'' < 0)$

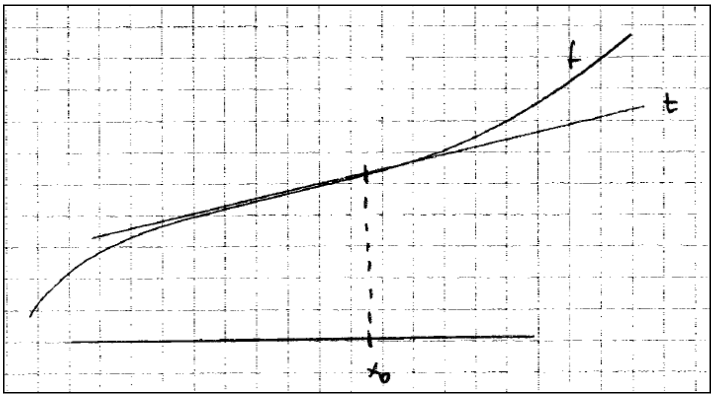


Ein Punkt, in dem f von positiver zu negativer Krümmung übergeht (oder umgekehrt) übergeht, heißt dann Wendepunkt von f:

$$f''(x_0) = 0,$$

$$\left.\begin{array}{ll} f''(x) < 0 & \text{für } x < x_0 \\ f''(x) > 0 & \text{für } x > x_0 \end{array}\right\} \text{oder umgekehrt}$$

In einem Wendepunkt durchdringt der Graph von f die Tangente t:



d) Extrem(al)stellen

Ist für alle x in der Nähe von x_0, d.h. auf einem Intervall der Form $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[. \varepsilon > 0$

$$f(x) \geq f(x_0)$$
$$\left(f(x) \leq f(x_0)\right)$$

so heißt x_0 eine lokale $\underbrace{\text{lokale Minimumstelle}}_{(\text{lokale Maximumstelle})}$ von f.

Beide Begriffe werden als lokale Extremal- (Extremum-)stelle zusammengefasst

1. Satz

Ist f differenzierbar und x_0 eine lokale Exremalstelle von f, so ist $f'(x)=0$.

Beweis: x_0 sei z.B. eine lokale Minimumstelle dann ist

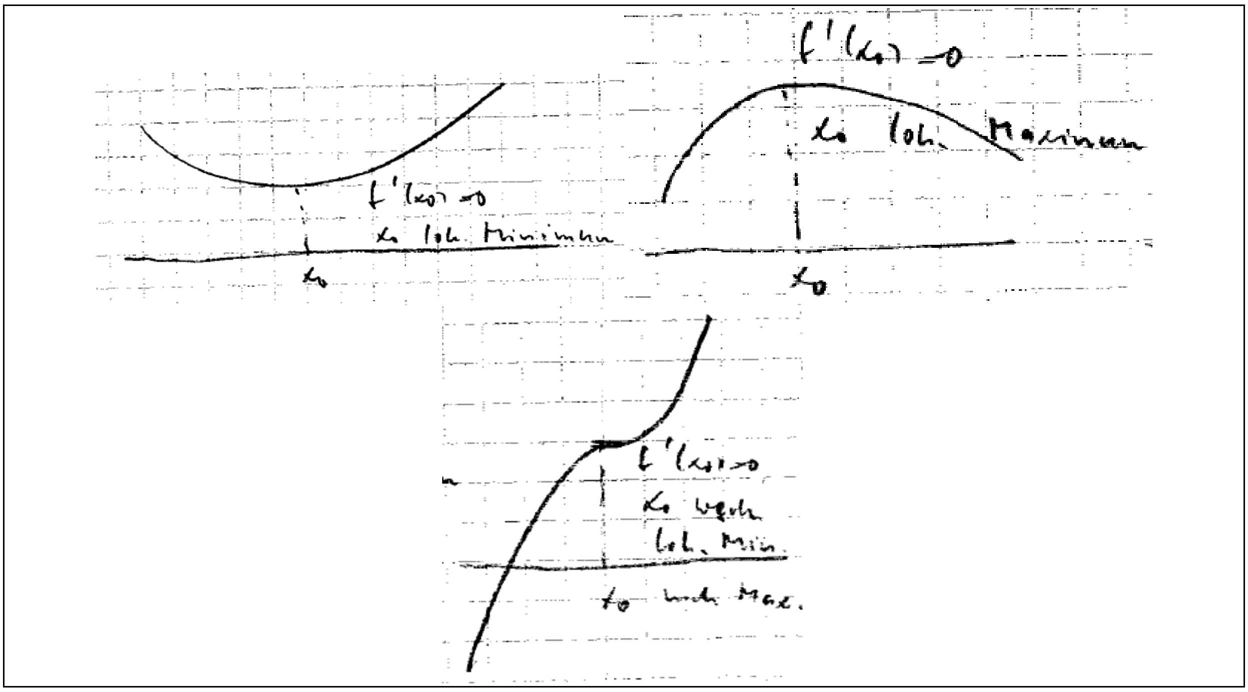
$$\frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\geq 0}}{x-x_0} \qquad \begin{cases} \geq 0 \text{ für } x > x_0 \\ \leq 0 \text{ fürx } < x_0 \end{cases}$$

Also ist $\underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{=f'(x_0)} = 0$

2. Definition

x_0 heißt ein kritischer Punkt von f, falls $f'(x_0)=0$.

Nach 1. sind Extremalstellen kritische Punkte, die Umkehrung gilt aber nicht:



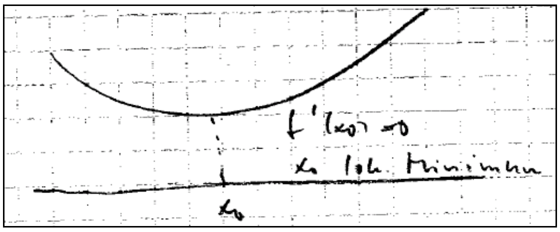
3. Satz

$f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ist lokale Minimumstelle
$f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ist lokale Maximumstelle

Ist $f'(x_0) = 0 = f''(x_0)$, so ist keine allg. Aussage möglich.

Beweis:

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so wächst f' in der Nähe von x_0 streng monoton.
Also ist $f' < 0$ links von x_0 und $f' > 0$ rechts von x_0, d.h. f fällt streng monoton links von x_0 und wächst streng monoton rechts von x_0, x_0 ist also eine lokale Minimumstelle.



Für $f''(x_0) < 0$ analog.
Beispiele für $f'(x_0) = 0 = f''(x_0)$:

$$f_1(x) = x^3 \quad, x_0 = 0 \quad, f'(x_0) = 3x_0^2 = 0$$
$$f''(x_0) = 6x_0 = 0$$

x_0 ist Wendepunkt

$$f_2(x) = x^4 \quad, x_0 = 0 \quad, f'(x_0) = 4x_0^3 = 0$$
$$f''(x_0) = 12x_0^2 = 0$$

x_0 ist lokale Minimumstelle

Allgemein gilt:

4. Satz

Ist $f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, aber $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
so gilt: x_0 ist
eine lokale Minimumstelle, falls n gerade ist und $f^{(n)}(x_0) > 0$,
eine lokale Maximumstelle, falls n ungerade ist und $f^{(n)}(x_0) < 0$,
ein Wendepunkt, falls n ungerade ist

5. Beispiele:

a) $f(x) = \sin x\,, x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \cos x = 0 \Rightarrow x = x_k := (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$= \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$f''(x) = -\sin x$, also

$$f''(x_k) = -\sin\left(\tfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} -1 \text{ für gerade } k \\ 1 \text{ für ungerade } k \end{cases}$$

<u>lokale Maximumstellen liegen also bei</u>

$x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ für gerade k,

d.h. $x_k = \ldots, -3\bullet\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 5\bullet\frac{\pi}{2}, 9\bullet\frac{\pi}{2}, \ldots$

während bei

$x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ für ungerade k

d.h. $x_k = \ldots, -\frac{\pi}{2}, 3\bullet\frac{\pi}{2}, 7\bullet\frac{\pi}{2}, \ldots$

<u>lokale Minimumstellen liegen.</u>

b) (als Merkhilfe für Satz 4)

$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$.

Dann ist

$f'(x) = nx^{n-1}, f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \ldots$

$f^{(n-1)}(x) = n!x,$

$f^{(n)}(x) = n!$

Also ist

$f'(0) = \ldots = f^{n-1}(0) = 0$, aber

$f^{(n)}(0) = n! > 0$

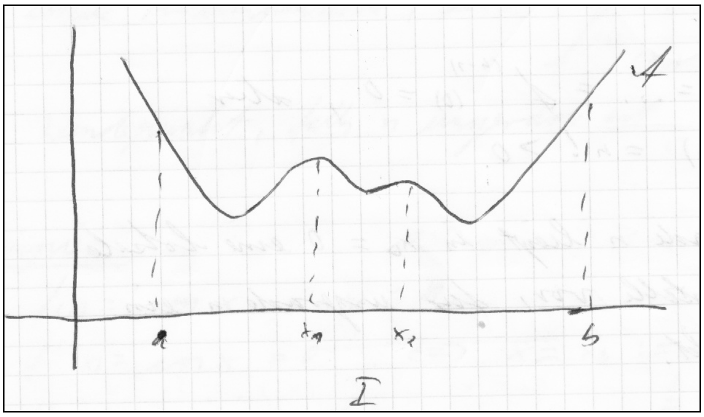
Für gerade n liegt in $x_0 = 0$ eine lokale Minimumstelle vor, für ungerade n ein Wendepunkt.

Analog für $f(x) = -x^n$

Ist x_0 eine <u>lokale Minimumstelle</u> (Maximumstelle, Extremalstelle), so heißt $f(x_0)$ <u>Minimalwert</u> (Maximalwert, Extremalwert)

Der globale (oder absolute) Maximalwert von f ergibt sich als größter Wert von f auf einem Intervall I unter den lokalen Maximalwerten von f auf I und den Funktionswerten von f in den Endpunkten von I (sofern sie zu I gehören)

Dort muss nicht $f'(x) = 0$ sein!



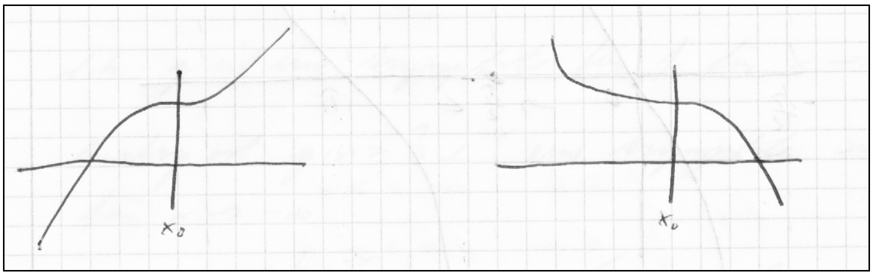
x_1 und x_2 sind lokale Maximalstellen

$$\max_{x \in I} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2)\}$$
$$= f(b)$$

Maximalwert von f auf I

<u>e) Sattelpunkte</u>

x_0 heißt ein <u>Sattelpunkt von f</u>:<=> $f'(x_0) = 0$ und f wächst (oder fällt) streng monoton in der Nähe von x_0

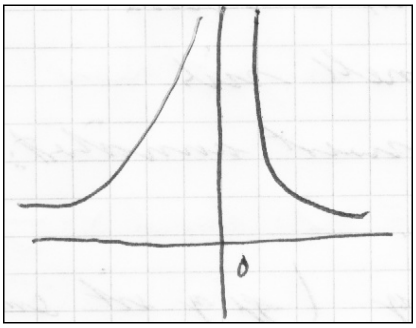


d.h. Sattelpunkte sind Wendepunkte mit waagerechter Tangente.
In einem Sattelpunkt ist also

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0$$

f) Unendlichkeiten, Asymptoten:

Ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > \pm\infty$, so heißt x_0 eine Unendlichkeit von f:



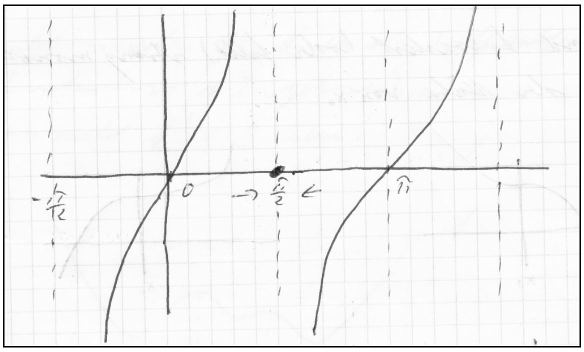
$$f(x) = \frac{1}{x^2}, x_0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

Manchmal ist es notwendig, rechts- und linksseitige Grenzwerte zu unterscheiden:

z.B. $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 0$ oder:

$f(x) = \tan x,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$



$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ \left(x < \frac{\pi}{2}\right)}} \tan x = \infty$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ \left(x > \frac{\pi}{2}\right)}} \tan x = -\infty$$

Weiter ist für eine Skizze des Graphen von f

ggf. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ bzw $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

zu bestimmen.

Durch Vergleich mit einer (bekannten) Funktion kann man beschreiben, wie schnell sich $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ einem Grenzwert annähert:

f und g seien zwei Funktionen.
f heißt <u>asymptotisch gleich g</u> (g ist eine Asymptote für f)

für $x \to \infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - g(x)\right) = 0$

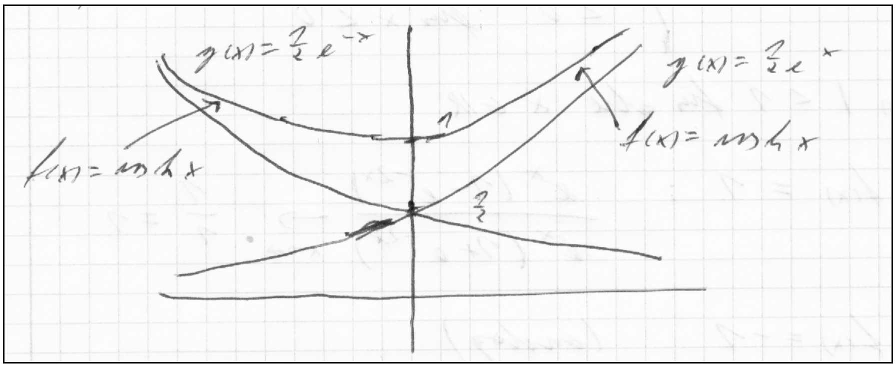
Analog für $x \to -\infty$

6. Beispiele

Setze
$$f(x) = \cosh x := \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$
und $g(x) = \frac{1}{2}e^{x}$

Dann ist $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - g(x)\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\tfrac{1}{2}e^{-x} = 0$

d.h. g ist eine Asymptote für f für $x \to \infty$.
Analog ist $g(x) = \tfrac{1}{2}e^{-x}$ eine Asymptote zu f für $x \to -\infty$



Beispiel zum Programm „Kurvendiskussion“

$$f(x) = \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

Nullstellen von f:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x} = e^{-x} \quad \Big|\cdot e^{x}$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} = 1$$
$$\Leftrightarrow x = 0$$

Vorzeichen von $f(x)$:

$$f(x)\begin{cases} > 0 \text{ für } x > 0 \\ < 0 \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

$|f(x)| :< 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1: \qquad \frac{\cancel{e^{x}}\left(1 - e^{-2x}\right)}{\cancel{e^{x}}\left(1 + e^{-2x}\right)} \underset{x\to\infty}{=} \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \text{ (analog)}$$

Es gilt

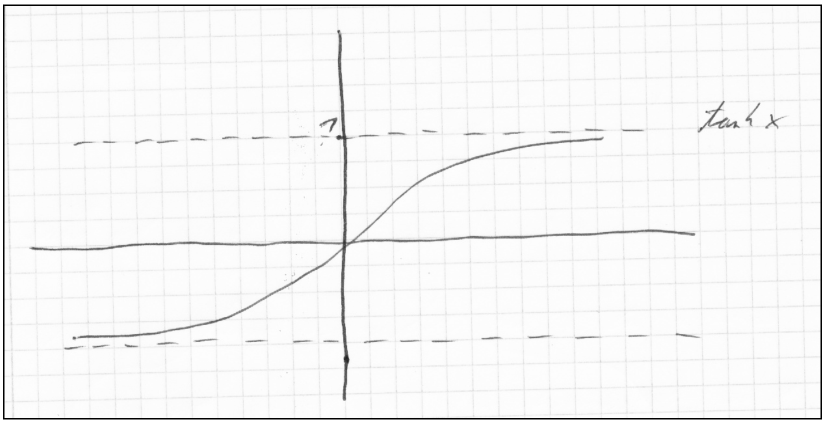
$\tanh' x = 1 - \underbrace{\tanh^2 x}_{<1} > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$ (vgl. Übungen)

d.h. f wächst streng monoton, es gibt keine Extremalstellen

$$\tanh'' x = \left(1 - \tanh^2 x\right)'$$
$$= -2 \bullet \tanh x \bullet \frac{1}{\underbrace{\cosh^2 x}_{>0 \text{ für alle } x}}$$
$$= 0 \;<=>\; x = 0$$

$x = 0$ ist also Wendepunkt

$\tanh' 0 = 1$



2.6 Die Taylorsche Formel: Potenzreichenentwicklung von Funktionen

Auftreten von Potenzreihenentwicklungen in früheren Kapiteln:

a) Es wurde der Grenzwert der Folge $(a_n)_n$, wobei $a_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ ist, bestimmt:

Für $|x| < 1$ ist $\lim_n a_n = \frac{1}{1-x}$

Setzt man also $f(x) := \frac{1}{1-x}$ (für alle $x \neq 1$)
so gilt:

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ für } |x| < 1$$

b) Es wurde gezeigt, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent ist.
Setzt man

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

so ist $D(f) = \mathbb{R}$ und es gilt:

$$f(0) = 1, f(1) = e, f(x+y) = f(x) \bullet f(y)$$

Daraus kann man folgern, dass $f(x) = \exp x = e^x$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$

c) Aus b) folgt unmittelbar rechnerisch die Potenzreihenentwicklung von z.B.

$$\begin{aligned}
\cosh x &:= \tfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(x^k + (-x)^k\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \underbrace{\left(1 + (-1)^k\right)}_{\substack{2,\text{falls } k \text{ gerade} \\ 0,\text{falls } k \text{ ungerade}}}
\end{aligned}$$

$$\cosh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)} x^{2m}$$

Analog für

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

Wie erhält man die Potenzreihen einen gegebenen Funktionen f um einen gegebenen Entwicklungspunkt $x_0 \in D(f)$, falls eine Potenzreihenentwicklung überhaupt existiert.

Ansatz (unter der Annahme, dass f um x_0 in eine Potenzreihe entwickelbar ist.):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \\ &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + ... \end{aligned}$$

Berechnung des Koeff. a_k ?

$$f(x_0) = a_0, \quad a_0 = f(x_0)$$

Potenzreihen darf man gliedweise differenzieren.

$$\begin{aligned} &f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + ... \\ &f'(x) = a_1, \quad a_1 = f'(x_0) \\ &f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + ... \\ &f''(x) = 2a_2, \quad a_2 = \tfrac{1}{2} f''(x_0) \\ &\quad\vdots \\ &f^{(k)}(x) = k!a_k + (k+1)!a_{k+1}(x - x_0) + ... \\ &f^{(k)}(x_0) = k!a_k, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \end{aligned}$$

„Rezept" für die Gewinnung der Entwicklung von f um x_0:

1. Definition

f sei auf dem offenen Intervall I mit Mittelpunkt x_0 beliebig oft differenzierbar. Dann heißt:

$$a_k := \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

der k-te Taylorkoeffizient und

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \qquad (a_k \text{ wie oben})$$

<u>die Taylorreihen von f um x_0</u>

Damit gilt:

2. Satz:

Ist f auf dem Intervall I mit Mittelpunkt x_0 durch eine Potenzreihe um x_0 darstellbar, soist diese Potenzreihe durch die Taylorreihe gegeben.

<u>Achtung:</u> Stellt man zu einer Funktion die Taylorreihe (um ein x_0) auf, so konvergiert die Reihe in x_0 gegen $f(x_0)$. Es gibt aber Beispiele, wo die Reihe für kein $x \neq x_0$ gegen $f(x)$ konvergiert.

Zunächst wird daher die Frage besprechen, wie gut die „Abschnittspolynome" der Taylorreihe zu f die Funktion f approximieren.

3. Definition

I sei ein offenes Intervall mit Mittelpunkt x_0. f sei n-mal differenzierbar auf I. Dann heißt

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

mit $a_k := \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

das <u>n-te Taylorpolynom zu f</u> (um x_0).

Es ist $\operatorname{grad} T_n \leq n$ unf $\operatorname{grad} T_n = n \iff a_n \neq 0 \iff f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

heißt das n-te Taylorsche Restglied.

Dann ist $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$

3'. Satz (Taylorformel mit Restglied)

Ist f auf dem offenen Intervall I mit Mittelpunkt x_0 $n+1$-mal differenzierbar und $f^{(n+1)}$ noch stetig, so gilt:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

wobei T_n das n-te Taylorpolynom ist und für das Restglied R_n gilt:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

wobei $s \in [x_0, x]$ (bzw.$[x, x_0]$).
s ist i.a. nicht explizit zu bestimmen!
Bemerkung: Für $n = 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_0(x) + R_0(x) \\ &= a_0 \qquad + \frac{f'(x)}{1!} \\ &= f(x_0) + f'(s)(x - x_0) \end{aligned}$$

$$\underline{f(x) - f(x_0) = f'(s)(x - x_0)}$$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Die Zwischenstelle s ist i.a. nicht explizit zu bestimmen. Daher muss man sich i.a. mit eienr oberen Schranke für $R_n(x)$ begnügen!

z.B. falls bekannt ist, dass auf dem Intervall I

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1}$$

gilt, so ist

$$\left|f(x) - T_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1} \qquad \text{für alle } x \in I$$

Es ist also mit umso größeren Fehlern von $T_n(x)$ im Bezug auf $f(x)$ zu rechnen, je weiter x von x_0 entfernt ist.

4. Beispiel:

$f(x) := e^x, x \in \mathbb{R}$

f ist beliebig oft differenzierbar und es ist $f^{(k)}(x) = e^x,\ k = 0,1,2,...$

Für $x_0 = 0$ ergibt sich $f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ für alle k

Taylorkoeffizienten: $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$

Taylorpolynome: $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$

Taylor-Reste:

$$
\begin{aligned}
\left|R_n(x)\right| &= \left|f(x) - T_n(x)\right| \\
&= \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k \right| \\
&\overset{\text{Taylor-}}{\underset{\text{formel}}{=}} \left| \frac{e^s}{(n+1)!} x^{n+1} \right|
\end{aligned}
$$

mit einer unbekannten, aber von x abhängenden Stelle
$s \in [0, x] \quad ([x, 0])$

Wähle für I das Intervall $I = [-m, m]$, $m \in \mathbb{N}$

Dann ist für alle $s \in I$
$s \le m$, also
$e^s \le e^m$

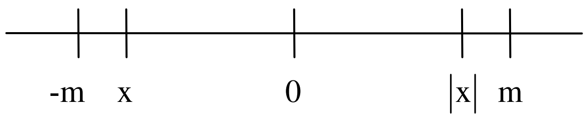
Folglich ist für alle $x \in I$

$$
\left|f(x) - T_n(x)\right| \le \left| \frac{e^m}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty
$$

d.h.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lim_n T_n(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{für alle } x \in [-m, m],
\end{aligned}
$$

aber, weil m beliebig groß gewählt werden kann, für alle $x \in \mathbb{R}$



5. Satz:

f besitzt Ableitungen beliebig hoher Ordnungen auf dem Intervall I mit Mittelpunkt x_0

Dann ist

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \lim_n T_n(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x - x_0)^k
\end{aligned}
$$

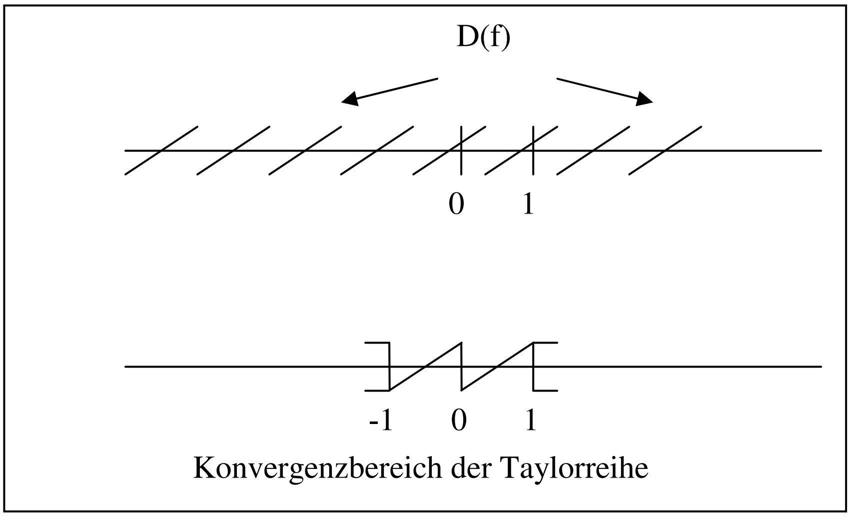
genau dann, wenn $\lim_n R_n(x) = 0$ ist.

6. Bemerkung

Der Definitionsbereich von f und der Bereich, in dem f durch eine Potenzreihe dargstellt wird, müssen nicht übereinstimmen.

z.B. gilt für $f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\quad D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

es ist aber $\frac{1}{1-x} = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ <u>nur</u> für $|x| < 1$



7. Beispiele

a) $\quad f(x) = \cos x, \quad x_0 = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \cos(0) & = 1 \\ \cos'(0) = -\sin 0 & = 0 \\ \cos''(0) = -\cos 0 & = 1 \\ \cos^{(3)}(0) = \sin 0 & = 0 \\ \cos^{(4)}(0) = \cos(0) & = 1 \end{array}\right\} 4-\text{er Zyklus}$$

$$\text{Also ist} \quad \left.\begin{array}{l} a_{2k+1} = 0 = \dfrac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} \\ 2_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} \end{array}\right\} \text{für alle } k = 0,1,2,\ldots$$

Die Taylorreihe zu $f(x) = \cos x$ um $x_0 = 0$ hat also die Form:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots$$

Für die Taylorpolynome gilt:

$$T_{2n} = T_{2n+1}$$

also ist

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - T_{2n}(x)\right| = \left|f(x) - T_{2n+1}(x)\right| \\
&= \left|R_{2n+1}(x)\right| \\
&= \frac{f^{(2n+2)}(s)}{(2n+2)!}|x|^{2k+2} \\
&= \frac{|\cos(s)|}{(2n+2)!}|x|^{2n+2} \\
&\leq \frac{1}{(2n+2)!}|x|^{2n+2} \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

d.h. es ist

$$\begin{aligned}
\cos x = f(x) &= \lim_{n\to\infty} T_n(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}$$

(vgl Übung: schnelle Konvergenz, geeignet zur praktische Berechnung von cos x für beliebige Werte von x!)

7. Beispiele (zur Taylor-Entwicklung = Potenzreihen-Entwicklung)

$$\left[\begin{aligned} f(x) &= T_n(x) + R_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(k)}(s)}{(k+1)!}(x-x_0)^k,\ \ s \in]x, x_0[\ (]x_0, x[) \end{aligned}\right]$$

a) $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ $\quad (x_0 > 0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

b) $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

c) Sei $f(x) = \ln(1+x), \quad x_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) & f(0) &= \ln 1 = 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \frac{1}{(1+x)^2} & f''(0) &= -1 \\ f^{(3)}(x) &= 2\frac{1}{(1+x)^3} & f^{(3)}(0) &= 2 \\ f^{(4)}(x) &= 2 \bullet 3 \frac{1}{(1+x)^4} & f^{(4)}(0) &= -6 \end{aligned}$$

allgemein:

$$\boxed{f^{(k)}(x) = (-1)^{(k-1)}(k-1)!\,\frac{1}{(1+x)^k}} \qquad \text{für } k \geq 1$$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= (-1)^{k-1}(k-1)! \\ \frac{f^{(k)}(0)}{k!} &= (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k!} \\ &= (-1)^{k-1}\frac{1}{k} \qquad k \geq 1 \end{aligned}$$

d.h. $\boxed{T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}}$

Für das Restglied $R_n(x)$ gilt:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!} x^{n+1}$$
$$= (-1)^n \cancel{n!} \frac{1}{(1+s)^{n+1}} \bullet \frac{1}{(n+1)\cancel{!}} x^{n+1}$$

Also ist für $\underset{(x)}{s} \in [0,1[$

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}|x|^{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty$$

Analoge Rechnung gilt für $\underset{(s)}{x} \in]-1,0]$

Also ist

$$f(x) = \ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} x^k$$
$$= x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} \pm \ldots$$

für $x \in]-1,1[$

Substituiert man $y := 1 + x$, so ergibt sich die Entwicklung
$(x = y - 1)$

$$\ln y = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} (y-1)^k$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} (1-y)^k (-1)^k$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{2k-1} \frac{1}{k} (1-y)^k$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (1-y)^k \qquad \text{für } y \in]0,2[$$

d) Nicht immer muss man die Taylorkoeffizienten durch fortgesetztes Differenzieren von f gewinnen.

z.B.

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad x_0 = 0$$

Es ist

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' \qquad \left[\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-x}\right)' &= -\frac{1}{(1-x)^2}(-1)\\ &= \frac{1}{(1-x)^2}\end{aligned}\right]$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' \text{ (für } |x|<1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^k\right)'$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k \qquad \text{für } |x|<1$$

Weitere Beispiele dieser Art im nächsten Abschnitt über Integralrechnung!

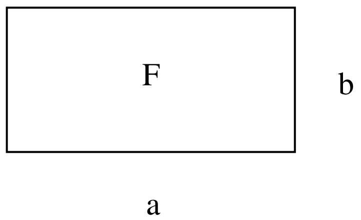
3. Integralrechnung

3.1 Flächeninhalt und Stammfunktion

Die Integralrechnung geht von 2 Fragestellungen aus.

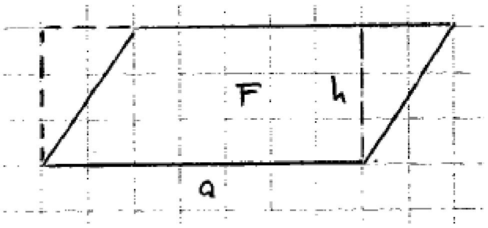
a) Berechung von Flächeninhalten:

Rechteck:



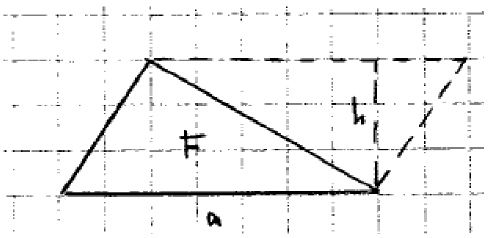
$F = a \cdot b$

Parallelogramm:

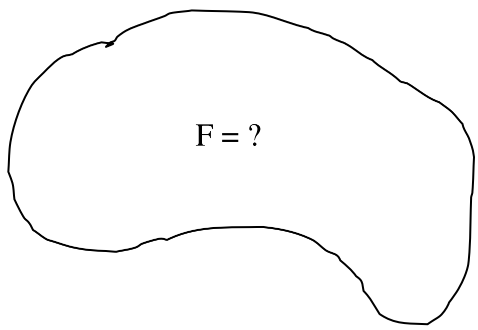


$F = a \cdot h$

Dreieck:



$F = \frac{1}{2} a \cdot h$



Ein Zugang zum Integralbegriff:

Flächeninhalt krummlienig begrenzter Flächen!

b) Gegeben sei eine Funktion f auf $[a, b]$. Gesucht wird eine Funktion F mit F' = f

1. Definition

Gilt F' = f auf $[a,b]$, so heißt F eine Stammfunktion zu f.

Eine Aussage wie

$$\sin' x = \cos x$$

kann man also auf 2 (äquivalente) Weisen lesen:

$\cos x$ ist die Ableitung von $\sin x$

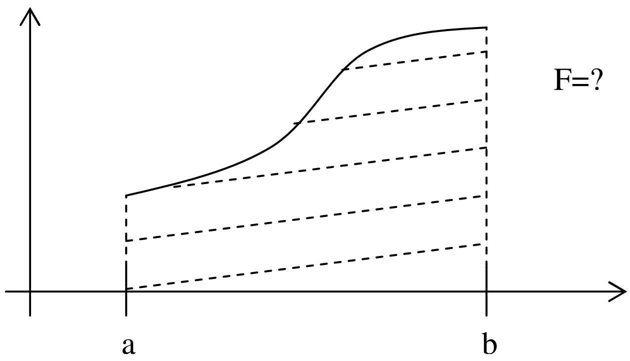
oder:

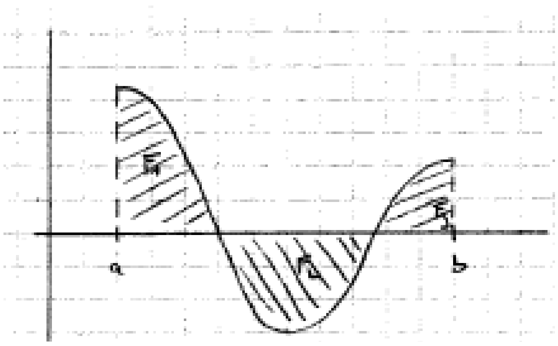
$\sin x$ ist eine Stammfunktion zu $\cos x$

In diesem Sinne liefert jede Ableitungsformel eine Stammfunktion.

Zunächst: Berechnung von Flächeninhalten

Dabei werden nur Flächeninhalte berechnet, die begrenzt werden von Abschnitten der x Achse und dem Graphen einer Funktion.

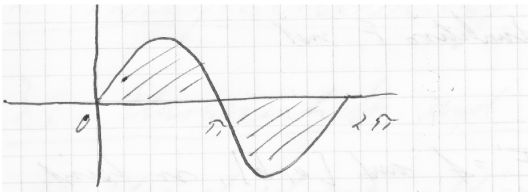




Flächeninhalte unterhalb der x-Achse haben einen negativen Inhalt, oberhalb einen positiven.

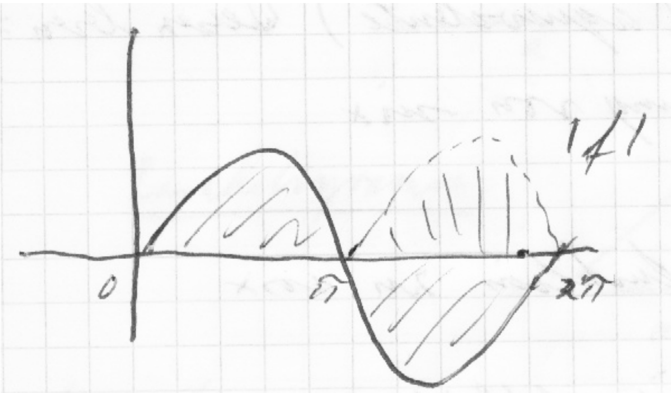
$F_1 > 0, F_3 > 0, F_5 > 0$ $\qquad F = F_1 + F_2 + ... + F_5$
$F_2 < 0, F_4 < 0$

$f(x) = \sin x$ F=0

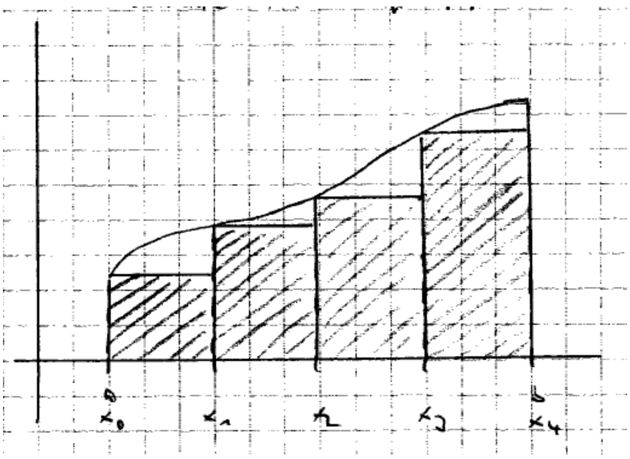


Falls alle Flächeninhalte positiv seien sollen (elementargeometrischer Inhalt)
ersetze f durch $|f|$

$f(x) = \sin x$



Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion
Wähle ein $n \in \mathbb{N}$ und setze $h := \frac{b-a}{n}$ und $x_i = a + ih,\ i = 0,...,n$



$n = 4$

$h = \frac{b-a}{4}$

Dann ist $x_0 = a$ und $x_n = b$
Setze

$$F_i := f(x_{i+1})h \text{ und}$$

$$I_n := \sum_{i=1}^{n} F_i$$

$$= h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

2. Satz

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, so konvergiert die Folge $\left(I_n\right)_n$.

Setze $I := \lim\limits_n I_n$

3. Definition

I heißt das Integral von f über dem Intervall $[a,b]$, symbolisch:

$$\int_a^b f(x)\,dx := I$$

a und b die <u>Intervallgrenzen.</u>

Statt „Integral" sagt man auch „bestimmtes Integral"

$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \text{ misst offensichtlich den gesuchten Flächeninhalt!}}$

4. Bemerkung

Falls f stetig ist, kann man F_n auch berechnen als

$$F_i = f(x_i) \bullet h \qquad (i = 1,\dots,n-1)$$

oder

$$F_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \bullet h$$

Auch dann ist $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sum^n F_i$

5. Beispiele:

Gesucht ist $\int_0^b f(x)\,dx \quad$ für $b > 0$ und $f(x) = x^2$

Wähle $n \in \mathbb{N}$, $h := \dfrac{b}{n}$, $x_i = ih$, $i = 0,\dots,n$

Dann ist $F_i = (x_{i-1})h = \left[(i-1)h\right]^2 \bullet h$

also

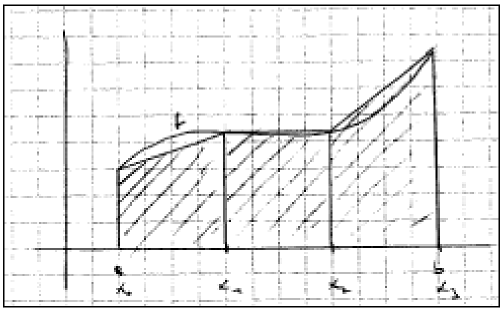
$$\begin{aligned}
I_n &= \sum_{i=1}^{n} F_i \\
&= h^3 \bullet \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \\
&= h^3 \bullet \left(1+4+9+\ldots+(n-1)^2\right) \\
&\overset{\text{Formel-}}{\underset{\text{sammlung}}{=}} h^3 \bullet \left[\tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right] \\
(*) &= \frac{b^3}{h^3}\left[\tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right] \\
&= \frac{b^3}{6}\,\frac{2n^3+\ldots}{n^3} \xrightarrow{n\to\infty} 2
\end{aligned}$$

Also ist $\boxed{\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}}$

(*) Methode führt nur kann zu einem Ergebnis, wenn der Grenzübergang $\lim_n I_n$ explizit vorgenommen werden kann!

Für kompliziertere Funktionen wohl nicht geeignet!

Auf der Methode, Integrale durch Ausschöpfung mit Rechtecken zu berechnen, basieren aber Methoden zur <u>näherungsweisen Berechnung von Integralen</u>:



Setze

$$\begin{aligned}
T_h(f) &:= \sum_{i=1}^{n} h \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} \\
&= \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right] \\
&= \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right] \\
&= \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] \\
&= h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]
\end{aligned}$$

6. Definition

$T_h(f)$ heißt die Trapezsumme für f zur Schrittweite $h := \frac{b-a}{n}$

7. Satz

Ist f stetig, so ist:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\(n\to\infty)}} T_h(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ soll (näherungsweise) integriert werden

<u>Trapezsumme:</u> $n\in\mathbb{N}, h := \frac{b-a}{n}$

$$x_i := a + ih,\ \ i = 0,..,n$$

Dann ist

$$\begin{aligned} x_0 = a \text{ und } x_n &= a + nh \\ &= a + n\frac{b-a}{n} \\ &= a + b - a \\ &= b \end{aligned}$$

h = Schrittweite

$$\begin{aligned} T_h(f) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)] \\ &= \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + ... + f(b)) \end{aligned}$$

„Trapezform zu f und zur Schrittweite“

7. Satz (Fortsetzung)

Ist f stetig , so ist

$$\lim_{\substack{h\to 0\\(h\to\infty)}} T_h(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ist f zweimal differenzierbar und $f''(x) \le M$ für alle $x\in[a,b]$, so kann der Fehler der Trapezsumme im Bezug auf $\int_a^b f(x)\,dx$ abgeschätzt werden.

Es ist $\left|T_h(f) - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{b-a}{12} M \bullet h^2$ (Fehlerformel für die Trapezsumme)

Anwendung: $\int_a^b f(x)\,dx$ soll mit der Trapezregel mit einem Fehler von höchstens $\varepsilon > 0$ berechnet werden.

Das ist sicher gegeben, wenn man

$$\frac{b-a}{12} \cdot M \cdot h^2 \le \varepsilon$$

gilt.

Also ist

$$h^2 \le \frac{12 \cdot \varepsilon}{(b-a) \cdot M}$$

$$h \le \sqrt{\frac{12 \cdot \varepsilon}{(b-a) \cdot M}}$$

zu wählen.

8. Beispiel:

$I = \int_0^2 xe^x\,dx$ soll mit einem Fehler von max. $\varepsilon = 10^{-2}$ bestimmt werden.

Es ist $f(x) = xe^x$, also

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$f''(x) = e^x + (x+1)e^x$$

$$= (x+2)e^x$$

folglich $|f''(x)| = |(x+2)e^x| \le 4e^2 = 29,56... \le 30 =: M$ für alle $x \in [0,2]$

d.h. $h \le \sqrt{\frac{12 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 30}} = 0,044....,$

$$n = \frac{b-a}{h} \ge \frac{2}{h} = 44,7...$$

n muss ganzzahlig sein, also wähle n = 45 (oder zur Vertiefung n = 50)

Für $n = 45$

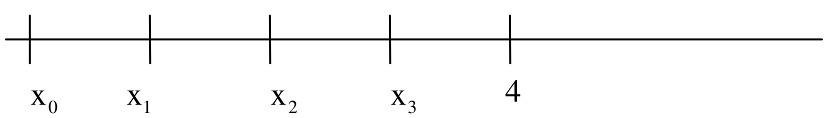
$$T_{45}(f) = 8.37...$$

also ist $\int_0^2 xe^x\,dx = 8,37 \pm 0,01$

Besser Näherungen ergeben sich mit der sog. Simpson-Formel (Kepplersche-Fassregel) bei etwas gleichem Rechenaufwand:

Wähle $n \in \mathbb{N}$ und $h := \frac{b-a}{2n}$ n, setze:

$$x_i = a + ih, \; i = 0,...,2n$$



Als Intervallnäherung auf $[x_{2(i-1)}, x_2]$, $i = 1,\dots,n$

dient $\frac{h}{3}[f\left(x_{2(i-1)}\right) + 4f\left(x_{2i-1}\right) + f\left(x_{2i}\right)]$

Aufsummiert ergibt sich:

9. Definition

$$S_h(f) = \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{n}[f\left(x_{2(i-1)}\right) + 4f\left(x_{2i-1}\right) + f\left(x_{2i}\right)]$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{2n-1}) + f\left(\underbrace{x_{2n}}_{=b}\right)]$$

heißt die Simpson-Formel für f zur Schrittweite $h = \frac{b-a}{2n}$

10. Satz

Ist f stetig, so gilt

$$\lim_{h\to 0} T_h(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ist f 4-mal differenzierbar und $\left|f^{(4)}(x)\right| \le M$ für alle $x \in [a,b]$, so ist:

$$\left|S_h(f) - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{b-a}{180} M h^4$$

[Beispiele in den Übungen!]

b) Integration und Stammfunktion

F Stammfunktion zu f auf $[a,b]$:<=> F' = f

11. Satz

a) Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen zu f auf dem Intervall $[a,b]$, so ist

$$F_2 = F_1 + c, \quad c \text{ konstant}$$

d.h. zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante

b) Ist F_1 eine Stammfunktion zu f auf $[a,b]$ und $c \in \mathbb{R}$, so ist auch

$$F_2 := F_1 + c$$

eine Stammfunktion zu f

Beweis:

a) F_1 und F_2 seien Stammfunktionen zu f auf $[a,b]$ dann ist

$$F_1' = f = F_2'\text{, also}$$
$$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0 \text{ auf } [a,b],$$
$$\text{also} \quad F_2 - F_1 \text{ konstant}, \qquad F_2 - F_1 = c,\ F_2 = F_1 + c$$

b) $F_1' = f$, c konstant $, F_2 := F_1 + c$
dann ist

$$F_2' = (F_1 + c)' = F_1' + (c)'$$
$$= F_1' = f$$

F_2 ist also auch Stammfunktion

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stellt den Zusammenhang her zwischen Integral und Stammfunktion.

12. Satz (Hauptsatz)

1. Ist f stetig auf $[a,b]$ und F_0 definiert durch
$F(x) := \int_a^x f(x)\,dx,\ x \in [a,b]$
so ist F eine Stammfunktion zu f auf $[a,b]$

2. Ist F irgend eine Stammfunktion zu f auf $[a,b]$
so ist $F = F_0 + c$ mit einer Konstanten c.

Dabei ist $c = F(a) = F_0(a) + c$
$$= \underbrace{\int_a^a f(x)\,dx}_{=0} + c$$
insbesondere ist

$$F(b) - F(a) = F_0(b) + c - \left(\underbrace{F_0(a)}_{=0} + c\right)$$
$$= \int_a^b bf(x)\,dx$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b}$$

13. Beispiele (vgl. Beispiel 5 zur Ausschöpfung mit Rechtecken)

Es ist $\left(\frac{1}{2}x^3\right) = x^2$, d.h. $F(x) := \frac{1}{3}x^3$ ist eine Stammfunktion zu $f(x) = x^2$ auf ganz $\mathbb{R}$

Also ist nach 12b)

$$\int_0^b x^2\,dx = F(b) - F(0) = \tfrac{1}{3}b^3$$

andere Schriebweise:

$$\int_0^b x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3 \Big|_0^b = \tfrac{b^3}{3}$$

14. Beispiel:

f ist eine Stammfunktion zu f', also ist

$$\int_a^b f'(x)dx = f\Big|_a^b = f(b) - f(a)$$, falls f' stetig ist.

15. Schreibweise:

Der Zusammenhang zwischen Stammfunktionen und Integral hat dazu geführt, dass man Stammfunktionen wie Integrale bezeichnet:

Statt $F(x)$ schriebt man $\int f(x)dx$ [ohne Integrationsgrenzen!]

Beispiel: $\int x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3$

$[\int_a^b x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3 \Big|_a^b]$

Statt „Stammfunktion" sagt man „unbestimmtes Integral"

Die Gesamtheit der Stammfunktion zu f ist dann durch

$\int x^2 dx + c, \quad c \in \mathbb{R}$, gegeben:

$\int x^2 dx[+c] = \tfrac{1}{3}x^3 + c$.

Um mit Stammfunktionen berechnen zu können, muss man möglichst viele Stammfunktionen zur Verfügung haben.
Aus den bisher bestimmten Ableitungen elementarer Funktionen kann man Stammfunktionen ablesen.

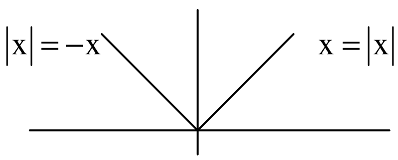
$f(x)$	$F(x)\ \left(\int f(x)\,dx\right)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} \qquad \left(\left(x^{n+1}\right)' = (n+1)x^n\right)$
(*) $\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\tan x$	??
$\arcsin x$	??
$\ln\lvert x\rvert$	??

Systematische Verfahren zur Berechnung von Stammfunktionen?

$$\left(\ln\lvert x\rvert\right)' = \frac{1}{\lvert x\rvert}\left(\lvert x\rvert\right)' \qquad \text{für } x \neq 0$$

(*)
$$= \frac{1}{\lvert x\rvert}\bullet\begin{cases} 1, \text{falls } x > 0 \\ -1 \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\lvert x\rvert} = \frac{1}{x}, \text{falls } x > 0 \\ -\frac{1}{\lvert x\rvert} = \frac{1}{x}, \text{falls } x < 0 \end{cases}$$



Also ist für alle $x \neq 0$

$$\boxed{\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}}$$

3.2 Integrationsmethoden

1. Partielle Integration

Diese Methode benutzt die Produktregel:
Für zwei differenzierbare Funktionen f und g ist:

$$(f \bullet g)' = f' \bullet g + f \bullet g',$$

also $\quad f' \bullet g = (f \bullet g)' - f \bullet g'$

Folglich ist

(*)
$$\int f'(t) \bullet g(t)\,dt = \int (f \bullet g)'(t)\,dt - \int f(t)g'(t)\,dt$$
$$= (f \bullet g)(t) - \int f(t)g'(t)\,dt (+c)$$

bei bestimmten Integralen:

(**) $\quad \int_a^b f'(t)g(t)\,dt = (f \bullet g)(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$

(*) mund (**) sind die Regeln für die partielle Integration:

Der Integral wird zerlegt in:
$f'(t) \bullet g(t)$ (linke Seite!)
f' wird integriert zu f,
g wird abgeleitet zu g'

Methode natürlich nur sinnvoll anwendbar, wenn die Integration von f' leichter ist, als die von $f' \bullet g$.

1. Beispiel

1) Gesucht ist $\int xe^x dx$

a) Setze $f'(x) = x, g(x) = e^x$

Dann ist $f(x) = \frac{x^2}{2}, g'(x) = e^x$

Also ist $\quad \int \underbrace{x}_{f'}\underbrace{e^x}_{g}\,dx = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2}\int \underbrace{x^2}_{f}\underbrace{e^x}_{g}\,dx = ?$

b) Setze $g(x) = x,\ f'(x) = e^x$

Dann ist $g'(x) = 1,\ f(x) = e^x$

Also ist

$$\int \underbrace{x}_{g}\underbrace{e^x}_{f'}\,dx = xe^x - \int \underbrace{1}_{g'} \bullet \underbrace{e^x}_{f}\,dx$$
$$= x \bullet e^x - e^x (+c)$$
$$= (x-1)e^x (+c)$$

2)

$$\int \underset{f'}{e^x}\,\underset{g}{\cos x}\,dx = \underset{f}{e^x}\cdot\underset{g}{\cos x} - \int \underset{f}{e^x}\cdot\underset{g}{(-\sin x)}\,dx$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx$$

(nochmalige partielle Intergration)

$$= e^x \cos x + \left[\underset{f}{e^x}\cdot\underset{g}{\sin x} - \int \underset{f}{e^x}\cdot\underset{g'}{\cos x}\,dx \right]$$

$$= e^x (\cos x + \sin x) - \int e^x \cos x\,dx$$

also $2\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x)(+c)$

3)

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \underset{f'}{\sin x}\cdot\underset{g}{\sin x}\,dx$$

$$= \underset{f}{(-\cos x)}\cdot\underset{g}{\sin x} - \int \underset{f}{(-\cos x)}\,\underset{g'}{\cos x}\,dx$$

$$= -\cos x\cdot\sin x + \int \underset{f'}{\cos x}\cdot\underset{g}{\cos x}\,dx$$

$$= -\cos x \sin x + \left[\sin x \cos x - \int \underset{f}{\sin x}\cdot\underset{g'}{(-\sin x)}\,dx \right]$$

$$= \int \sin^2 x\,dx$$

Stattdessen

$$\int \sin^2 x\,dx \overset{\text{s.o.}}{=} -\cos x\cdot\sin x + \int \cos^2 x\,dx$$

$$(\cos^2 x = 1 - \sin^2 x)$$

$$= -\cos x\cdot\sin x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx$$

$$= -\cos x\cdot\sin x + x - \int \sin^2 x\,dx$$

$$\cancel{2}\int \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(x - \cos x \sin x) + c$$

z.B. ist also

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \tfrac{1}{2}\left(x - \cos x \bullet \sin x\right)\Big|_0^{\pi}$$
$$= \tfrac{1}{2}(\pi - 0)$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi$$

4)

$$\int \ln x \, dx \overset{\text{Trick!}}{=} \int \underset{f'}{1} \bullet \underset{g}{\ln x} \, dx$$
$$= \underset{f}{x} \underset{g}{\ln} x - \int x \bullet \tfrac{1}{x} dx$$
$$= x \ln x - \int 1 dx$$
$$= x \ln x - x$$
$$= (\ln x - 1) x + c$$
$$= x(-1 + \ln x) + c$$

2. Die Substitutionsmethode

F sei eine Stammfunktion zu f , g sei eine differenzierbare Funktion.
Dann ist nach der Kettenregel

$$(F \circ g)'(s) = F'(g(s)) \bullet g'(s) \qquad (F \circ g)(s) = F(g(s))$$
$$= f(g(s)) \bullet g'(s)$$

d.h.

$F \circ g$ ist eine Stammfunktion zu $(f \circ g) \bullet g'$

d.h.

$$\int f(g(s)) \bullet g'(s) \, ds = (F \circ g)(s)$$
$$= F(g(s))$$
$$= \int f(t) \, dt \Big|_{t=g(s)} \qquad (+c)$$

bzw

$$\int_a^b f(g(s)) \bullet g'(s) \, ds = F(g(s))\Big|_{s=b}^{s=a}$$
$$= F(g(b)) - F(g(a))$$
$$= F(t)\Big|_{t=g(a)}^{t=g(b)}$$
$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) \, dt$$

Substitutionsregel:

$$\int f(g(s)) \cdot g'(s) = \int f(t)\,dt \Big|_{t=g(s)} \quad (+c)$$

bzw.

$$\int_a^b f(g(s)) \cdot g'(s)\,ds = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Die Regel kann in beiden Richtungen gelesen werden:

I. Es ist ein Integral der Form $\int_a^b h(s)\,ds$ zu berechnen.
Man erkennt, dass h zerlegt werden kann in $h(s) = f(g(s)) \cdot g'(s)$
mit zwei Funktionen f und g, wobei f leicht zu integrieren ist.

Dann ist $\int_a^b h(s)\,ds = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$.

Die Veränderung der Grenzen ist leicht zu erklären:

$g(s)$ wird durch t ersetzt, $t = g(s)$

Für $s = a$ ist $t = g(a)$

$s = b$ ist $t = g(b)$

2. Beispiel

a) $\int_a^b \underbrace{\sin^2 s \cdot \cos s}_{h(s)}\,ds = ?$

Wähle $f(t) = t^2, g(s) = \sin s$

Dann ist $f(g(s)) \cdot g'(s) = \sin^2 s \cdot \cos s = h(s)$

also ist

$$\int \sin^2 s \cdot \cos s\,ds = \int f(t)\,dt \Big|_{t=g(s)}$$

$$= \int t^2 dt \Big|_{t=\sin s}$$

$$= \frac{t^3}{3} \Big|_{t=\sin s}$$

$$= \frac{\sin^3 s}{3} (+c)$$

$$\int_a^b \sin^2 s \cos s\,ds = \frac{\sin^3 s}{3} \Big|_a^b$$

b) $\int_a^b \frac{g'(s)}{g(s)} ds = ?$ $\quad$ (g eine gegebene Funktion)

$$\int g'(s)\frac{1}{g(s)} ds = \int \frac{1}{t} dt\Big|_{t=g(s)}$$
$$= \ln|t|\Big|_{t=g(s)}$$
$$= \ln|g(s)|(+c)$$

$(g(s) \neq 0 \text{ auf } [a,b]!)$

$$\int_a^b \frac{g'(s)}{g(s)} ds = \ln|g(b)| - \ln|g(a)|$$

c)

$$\int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2x}^{g'(x)}}{\underbrace{x^2+a^2}_{g(x)}} dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + c$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + c$$

II Manchmal ist es zweckmäßiger, die Substitutionsregel in der anderen Richtung zu lesen.

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = \int_a^b f(g(s)) \bullet g'(s) ds,$$

d.h. man ersetzt t durch $g(s)$ und berechnet das rechte Integral

3. Beispiele

a) $\int \frac{1}{e^t+1} dt \quad =?$

Es ist $f(t) = \frac{1}{e^t+1}$

Setze $s := e^t$.

$\underline{t = g(s) = \ln s}$

Dann ist

$$f(g(s)) \bullet g'(s) = \frac{1}{e^{\ln s}+1} \bullet \frac{1}{s}$$
$$= \frac{1}{s+1} \bullet \frac{1}{s},$$

also ist

$$\int \frac{1}{e^t+1} dt \quad = \int \frac{1}{s+1} \bullet \frac{1}{s} ds\Big|_{s=e^t}$$

$$= \int \left[\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s}\right] ds \Big|_{s=e^t}$$

$$= \int \frac{1}{s+1} ds + \int \frac{1}{s} ds \Big|_{s=\dots}$$

$$= -\ln|1+s| + \ln|s| \Big|_{s=\dots}$$

$$= -\ln\left(e^t + 1\right) + \ln e^t \; (+c)$$

$$= \ln \frac{e^t}{e^t + 1} (+c)$$

$$\int_a^b \frac{1}{e^t+1} dt = \ln \frac{e^t}{e^t+1} \Big|_a^b$$

Durch die Rücksubstitution $s = g^{-1}(t)$ kehrt man zur ursprünglichen Variablen zurück und kann dann die ursprünglichen Integrationsgrenzen benutzen.

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(s)) \bullet g'(s) ds$$

Praktisches Vorgehen:

a) $\int \sin^2 s \cos s \, ds$ Substitution: $t = \sin s$

$\frac{dt}{ds} = \cos s$ "Bruch"

$dt = \cos s \, ds$

$$= \int t^2 dt \int \quad \Big| t = \sin s$$

$$= \frac{1}{3} t^3 \Big|_{t=\sin s} (+c)$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 s (+c)$$

Zuerst den „störenden Term“ substituieren
=> die neue Variable nach der alten ableiten,
=> nach der alten ableiten
=> den gesamten Integranden einschließlich der Integrationsvariablen umschrieben
=> Integrieren
=> neue Variable wieder durch die alte ersetzen

<u>Grenzen müssen nicht transformiert werden!</u>

$$\int_a^b \sin^2 s \cos s \, ds = \frac{1}{3} \sin^3 s \Big|_a^b$$

b) $\int \frac{1}{e^t+1}dt$ Substitution: $s = e^t$

$= \int \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} ds \Big|_{s=e^t}$ $\frac{ds}{dt} = e^t \Rightarrow dt = \frac{ds}{e^t} = \frac{1}{s}ds$

…

$= t - \ln\left(e^t+1\right) + c$

c) $\int e^{-x^2}dx$ Substitution: $s = x^2$

$\frac{1}{2}\int e^{-s} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} ds$ $\frac{ds}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{ds}{2x} \Rightarrow dx = \frac{ds}{2\sqrt{s}}$

<u>ebenso schwierig</u>

Zu $f(x) = e^{-x^2}$ gibt es keine Stammfunktion, die sich mit bekannten Funktionen ausdrücken lässt.

$\int_a^b e^{-x^2}dx$ kann also nicht mit dem Hauptsatz berechnet werden, sondern nur näherungsweise.

Beispiele für „einfache" Substitution:

$\int f(ax)dx$ Substitution: $t = ax$

$= \frac{1}{2}\int f(t)dt\Big|_{t=ax}$ $\frac{dt}{dx} = a \Rightarrow dx = \frac{dt}{a}$

Beispiel:

$\int e^{ax}dx$ Substitution: $f(t) = e^t$

$= \frac{1}{a}\int e^t\, dt\Big|_{t=ax}$

$= \frac{1}{a}e^{ax}\,(+c)$

$\int f(x - x_o)dx$ Substitution: $t = x - x_0$

$= \int f(t)dt\Big|_{t=x-x_o}$ $\frac{dt}{dx} = 1 \Rightarrow dt = dx$

Beispiel:

$\int e^{x-x_o}dx$ Substitution: $t = x - x_0$

$= \int e^t\, dt\Big|_{t=x-x_0}$

$= e^{x-x_0}$

3. Integration durch Partialbruchzerlegung

Integriert werden dabei rationale Funktionen, d.h. Funktionen der Form:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei p und w Polynome sind, wobei $\operatorname{grad} q \geq 1$ ist.

Die zu besprechende Methode erfordert, dass

$$\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q \qquad \text{(„Gradbedingung“)}$$

Falls diese Bedingung verletzt ist, also

$$\operatorname{grad} p \geq \operatorname{grad} q$$

ist, macht man zunächst Polynomdivision und erreicht eine Darstellung der Form

$$r = \frac{p}{q} = p_1 + \frac{p_2}{q},$$

wobei p_1 und p_2 Polynome sind und $\operatorname{grad} p_2 < \operatorname{grad} q$.

p_1 und $\frac{p_2}{q}$ werden dann einzeln integriert.

4. Beispiel

$$r(x) = \frac{x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2x - 2}{x^2 - 3x - 5} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

=Y Gradbedingung verletzt!

$$\left(x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2x - 2\right) : \left(x^2 - 3x - 5\right) = \underbrace{\left(x^2 + 2\right)}_{p_1(x)} + \frac{\overbrace{4x + 8}^{p_2(x)}}{\underbrace{x^2 - 3x - 5}_{q(x)}}$$

$$\begin{array}{l} -\left(x^4 + 3x^3 - 5x^2\right) \\ \hline \qquad\qquad +2x^2 - 2x - 2 \\ \qquad\qquad -\left(2x^2 - 6x - 10\right) \\ \hline \qquad\qquad\qquad +4x + 8 \end{array}$$

Für die Integration von $\frac{p_2}{q}$ benötigt man die Nullstellen von q!

Einige Facts über Polynomnullstellen:

a) Ist p ein Polynom mit $\operatorname{grad} p = n \geq 1$ und x_1 eine Nullstelle von p, so ist

$$p_1(x) := \frac{p(x)}{x - x_1}$$

ein Polynom mit $\operatorname{grad} p_1 = n - 1$ („Division geht auf"),

d.h. man kann p schreiben als

$$p(x) = p_1(x)(x - x_1)$$

Ist dann x_2 eine Nullstelle von p_1, so gilt:

$$p(x) = p_2(x)(x - x_0)(x - x_2)$$

usw., d.h. sind $x_1, ..., x_k$ die voneinander verschiedenen Nullstellen von p, so ist

$$p(x) = p_k(x) \bullet (x - x_1)^{l1} \bullet (x - x_2)^{l2} \bullet ... \bullet (x - x_k)^{lk},$$

wobei p_k ein Polynom <u>ohne Nullstellen</u> ist. Dann ist <u>$\operatorname{grad} p_k$ gerade!</u>

Die Faktoren $x - x_j$ heißen <u>Linearfaktoren von p.</u>

Die Zerlegung des Nennerpolynoms q in Linearfaktoren ist die Grundlage der Partialbruchzerlegung des Quotienten $\frac{p}{q}$.

Methode wird hier nur für $\operatorname{grad} q = n = 2 \text{ oder} = 3$ demonstriert.

<u>$n = 2$:</u> Zu integrieren ist ein Ausdruck der Form:

$$r(x) = \frac{ax + b}{x^2 + cx + d}$$ (ein Faktor bei x^2 wird vorher gekürzt!)

Nullstellen des Nennerpolynoms:

$$x^2 + cx + d = \left(x + \tfrac{c}{2}\right)^2 - \tfrac{c^2}{4} + d = 0$$
$$\Longleftrightarrow \left(x + \tfrac{c}{2}\right)^2 = \tfrac{c^2}{4} - d$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(c^2 - 4d\right)$$

3 Fälle:

a) $c^2 - 4d > 0$ Dann zwei verschiedene Nullstellen:

$$x_1 = -\tfrac{c}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4d}$$
$$x_2 = -\tfrac{c}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2 - 4d}$$

Es ist $x^2 + cx + d = (x - x_1)(x - x_2)$

b) $c^2 - 4d = 0$ Dann eine (doppelte) Nullstelle

$$x_1 = -\tfrac{c}{2}$$

Es ist $x^2 + cx + d = \left(x + \tfrac{c}{2}\right)^2$

c) $c^2 - 4d < 0$, keine Nullstelle

q muss unzerlegt bleiben

Im Fall a) macht man den Ansatz:

$$\frac{ax + b}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

im Fall b)

$$\frac{ax + b}{(x - x_1)^2} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2}$$

zu bestimmen sind die Konstanten A und B:

Beispiele:

a)
$$\frac{x + 2}{x^2 - 3x - 4} = \frac{x + 2}{(x - 4)(x + 1)}$$

$$[x^2 - 3x - 4 \Leftrightarrow \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4} - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 = 4 + \tfrac{9}{4} = \tfrac{25}{4}$$
$$\Leftrightarrow x = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$$= \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 1}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner:

$$x + 2 = A(x + 1) + B(x - 4)$$
$$= (A + B)x + (A - 4B)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} A+B&=1 \quad |\cdot 4 \\ A-4B&=2 \end{aligned} \quad + \qquad \begin{aligned} 5A&=6 \\ A&=\tfrac{6}{5} \\ B&=1-A \\ &=-\tfrac{1}{5} \end{aligned}$$

oder:
Einsetzen geschickter x-Werte (=Nullstellen)

$x=4 \qquad 6=5A \qquad \Rightarrow \qquad A=\tfrac{6}{5}$

$x=-1 \qquad 1=-5\cdot B \qquad \Rightarrow \qquad B=-\tfrac{1}{5}$

Also ist

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4}=\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{x-4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+1}$$

b)

$$\frac{x+2}{x^2-2x+1}=\frac{x+2}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}$$

$$x+2=A(x-1)+B$$

Bestimme A und B:
Koeffizientenvergleich:

$1=A$

$2=B-A=B-1 \Rightarrow B=3$

oder:
Einsetzen zweier x-Werte:

$x=1: \qquad 3=B$

$x=0: \qquad 2=-A+B=-A+3$

$\qquad A=1$

Es können <u>beliebige x-Werte</u> eingesetzt werden.

$$\frac{x+2}{x^2-2x+1}=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}$$

(Probe, indem man die Zerlegung wieder auf den Hauptnenner bringt.)

Die gesuchten Integrale ergeben sich dann aus den Formeln:

$$\int\frac{1}{x-x_1}dx=\ln|x-x_1|+c$$

$$\int \frac{1}{(x-x_1)^2}\,dx = -\frac{1}{x-x_1} + c$$

und
$$\left[\begin{aligned} \int (x-x_1)^{-1}\,dx &= (-1)(x-x_1)^{-1} + c \\ &= -\frac{1}{x-x_1} + c \end{aligned}\right]$$

Für die beiden obigen Integranden ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx &= \frac{6}{5}\int \frac{1}{x-4}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \frac{6}{5}\ln|x-4| - \frac{1}{5}\ln|x+1| + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2-2x+1}\,dx &= \int \frac{x+2}{(x-1)^2} \\ &= \int \frac{1}{x-1}\,dx + 3\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \\ &= \ln|x-1| - 3\frac{1}{x-1} + c \end{aligned}$$

Im Integrationsintervall darf <u>keine Nullstelle des Nennerpolynoms liegen!</u>

Im 3. Fall hat das Nennerpolynom keine Nullstelle, dafür existiert eine direkte Integrationsformel (vg. Formelsammlung)

Ist $4d > c^2$, so gilt

$$\begin{aligned} &\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}\,dx \\ &= \frac{a}{2}\ln\left(x^2+cx+d\right) + \frac{2b-ac}{\sqrt{4d-c^2}}\arctan\frac{2x+c}{\sqrt{4d-c^2}} \end{aligned}$$

Ein wichtiger Spezialfall ist

$$\int \frac{ab+x}{\underbrace{x^2+1}_{\text{keine Nullst.}}}\,dx :$$

Entweder spezialisieren der obigen Formel
oder:

$$\begin{aligned}\frac{ax+b}{x^2+1} &= \frac{ax}{x^2+1}+\frac{b}{x^2+1}\\ &= \frac{a}{2}\bullet\frac{2x}{x^2+1}+\frac{b}{x^2+1}\end{aligned}$$

$$\int \frac{ax+b}{x^2+1} = \frac{a}{2}\ln\left(x^2+1\right)+b\bullet\arctan x + c$$

$\underline{n=3}$

Dann sind 4 verschiedene Fälle möglich. Angegeben wird die Form des Nennerpolynoms (in möglichst weitgehend zerlegter Form) und der jeweilige Ansatz für die jeweilige Partialbruchzerlegung. Die unbekannten Konstanten werden dann wie im Fall $\underline{n=2}$ bestimmt.

1. Fall: $q(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, wobei die Nullstellen x_1, x_2, x_3 alle voneinander verschieden sind.

Ansatz: $$\frac{ax^2+bx+c}{q(x)} = \frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}$$

2. Fall: $q(x)=(x-x_1)^2(x-x_3), \qquad x_1 \neq x_3$

Ansatz: $$\frac{ax^2+bx+c}{q(x)} = \frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{(x-x_1)^2}+\frac{C}{x-x_3}$$

3. Fall: $q(x)=(x-x_1)^3$

Ansatz: $$\frac{ax^2+bx+c}{q(x)} = \frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{(x-x_1)^2}+\frac{C}{(x-x_1)^3}$$

4. Fall: $q(x)=(x-x_1)\left(\underbrace{x^2+dx+e}_{\text{keine Nullstelle}}\right), 4e>d^2$

Ansatz: $$\frac{ax^2+bx+c}{q(x)} = \frac{A}{(x-x_1)}+\frac{Bx+C}{x^2+dx+e}$$

5. Beispiel

$$\int \frac{4x^3-3x^2+x-4}{x^3-x^2-x+1}dx = ?$$

1. Gradbedingung erfüllt? Nein!
   Also Polynomdivision

$$\left(4x^3-3x^2+x-4\right):\left(x^3-x^2-x+1\right)=4+\frac{x^2+5x}{x^3-x^2-x+1}$$

2. Aufstellen der Nennernullstellen:

   $x_1 = 1$ ist eine Nullstelle
   „Abdividieren" von x_1

$$\begin{array}{l} \left(x^3-x^2-x+1\right):\left(x-1\right)=x^2-1 \\ \underline{-\left(x^3-x^2\right)} \\ \qquad\qquad -x+1 \\ \qquad\quad \underline{-\left(-x+1\right)} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

   Also ist:

$$\begin{aligned} x^3-x^2-x+1 &= \left(x-1\right)\left(x^2-1\right) \\ &= \left(x-1\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right) \\ &= \left(x-1\right)^2\left(x+1\right) \end{aligned}$$

3. Ansatz zur Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2+5x}{\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{\left(x-1\right)^2}+\frac{C}{x+1}$$

4. Bestimmung der Koeffizienten

$$x^2+5x = A\left(x-1\right)\left(x+1\right)+B\left(x+1\right)+C\left(x-1\right)^2$$

$$\begin{array}{ll} x=1: & 6=2B, \quad B=3 \\ x=-1: & -4=4C, \quad C=-1 \\ x=2: & 14=3A+3B+C \\ & 14=3A+9-1 \\ & 6=3A, \quad A=2 \end{array}$$

5. Die Partialbruchzerlegung hat also die Form:

$$\frac{x^2+5x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1}$$

6. Integration:

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^3-3x^2+x+4}{x^3-x^2-x+1}\,dx &= \int 4dx + 2\int \frac{1}{x-1}dx + 3\int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \int \frac{1}{x+1}dx \\ &= 4x + 2\ln|x-1| - 3\frac{1}{x-1} - \ln|x+1| (+C) \\ &= 4x - 3\frac{1}{x-1} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x+1|} + C\end{aligned}$$

Beim Einsetzen von Grenzen ist darauf zu achten, dass dazwischen keine Nennernullstelle liegt.

im obigen Beispiel kann

$$\int_a^b \ldots$$

berechnet werden für alle a und b mit: $1, -1 \notin [a, b]$

4. Integrieren von Potenzreihen

Potenzreihen kann man „gliedweise" integrieren, d.h. ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

für alle x mit $|x-x_0| < r \quad (r>0)$, so ist eine Stammfunktion zu f auf diesem Intervall gegeben durch:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int (x-x_0)^k\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + C\end{aligned}$$

$$\text{Indexverschiebung:}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{k}(x-x_0)^k + C \\ &= \underbrace{a_0(x-x_0) + \tfrac{a_1}{2}(x-x_0)^2 + \ldots}_{} + C\end{aligned}$$

Die Integrationskosntante liefert dabei das Absolutglied, d.h. es ist:

$$\underline{\underline{F(x_0) = c}}$$

Beispiele:

a) $f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (für alle $x \in \mathbb{R}$)

$$\int f(x)\,dx = \int e^x dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int x^k\, dx$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k + C$$

Für $c = 1$ ergibt sich: $F(x) = e^x$

für $c = 0$ ergibt sich: $F(x) = e^x - 1$

b) Gesucht ist die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \arctan x$ um $x_0 = 0$

<u>1. Möglichkeit:</u> Bestimme $f^{(k)}(0) = \arctan^{(k)}(0)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$f''(x) = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$
$$f''(x) = \ldots \text{ Bildungsgesetz?}$$

<u>2. Möglichkeit:</u>

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-\left(-x^2\right)} \quad \text{(geometrische Reihe)}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^k \qquad \left(|x| < 1\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$
$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \ldots$$

$$f(x) = \arctan x = \int f'(x)\,dx$$
$$= \int \frac{1}{1+x^2} dx$$
$$= \int \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2x} dx$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int x^{2x} dx$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} + C$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \ldots + C$$

Dabei ist $c = f(0) = \arctan 0 = 0$, also ist die Reihenentwicklung des $\arctan$ durch

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (|x| < 1)$$

gegeben.

3.3 uneigentliche Integrale

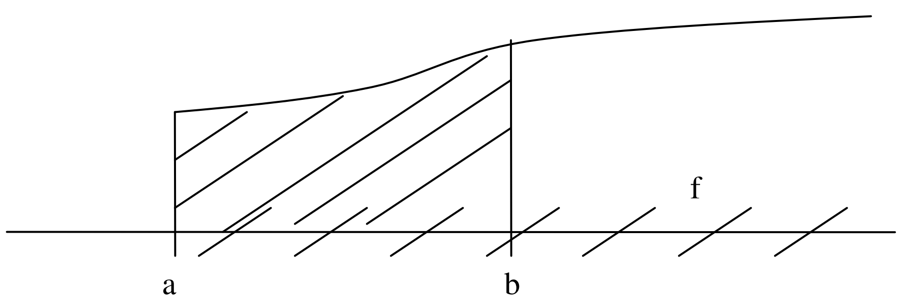
Bisher erden Integrale der Form

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bestimmt, wobei $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und f stetig auf [a,b] ist. („eigentliche Integrale“)

„uneigentliche Integrale“: Eine der beiden Grenzen ist ∞ oder $-\infty$ oder f ist nicht stetig in mindestens einem Endpunkt des Integrationsintervalls.

1. f sei definiert auf dem Intervall $[a, \infty[= \{c \mid a \leq x\}$ und dort stetig.



Dann existiert für jedes b > a

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

Man setzt

$$\int_a^\infty f(t)\,dt := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\,dt \text{ ist nicht immer gesichert:}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty 1\,dt &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b 1\,dt \\ &= \lim_{b\to\infty} b \\ &= \infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cos x\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos x\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(\sin x \Big|_0^b \right) \\ &= \lim_{b\to\infty} \sin b \qquad \text{existiert nicht!}\end{aligned}$$

1. Beispiel

a)

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx \quad (0<a<b)$$
$$= \ln x \Big|_a^b$$
$$= \ln b - \ln a$$
$$\xrightarrow{b\to\infty} \infty$$

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx \text{ exisitert nicht} \left(\text{oder} \int_a^b \frac{1}{x}dx = \infty \right)$$

b)

$$\int_a^b \frac{1}{x^n}dx \qquad (0<a<b)$$

$$\int x^{-n} = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1} = \frac{1}{1-n}\frac{1}{x^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{1-n}\frac{1}{x^{n-1}}\Big|_a^b$$
$$= \frac{1}{1-n}\left[\frac{1}{b^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right]$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} -\frac{1}{1-n}\frac{1}{a^{n-1}} = \frac{1}{1-n}\frac{1}{a^{n-1}}$$

Also ist für n > 1 und a > 0

$$\boxed{\int_a^\infty \frac{1}{x^n}dx = \frac{1}{n-1}\frac{1}{a^{n-1}}}$$

Analog definiert man

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

falls f def. und stetig ist auf $]-\infty, b]$ und der Grenzwert existiert, so wie

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \int_0^\infty f(x)dx + \int_{-\infty}^0 f(x)dx\ ,$$

falls die beiden rechten Integrale existieren!

Es ist <u>nicht</u> definiert:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a f(x)dx$$

Beispiel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx = ?$$

<u>1. Methode (richtige Methode!)</u>

$$\int_{0}^{\infty} \sin x \, dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\cos x \Big|_0^b\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}(1-\cos b)$$

also existiert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx \text{ nicht!}$$

<u>2. Methode (falsch!)</u>

$$\int_{-a}^{a} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{-a}^{a}$$

$$= -[\cos a - \underbrace{\cos(-a)}_{=\cos a}]$$

$$= 0 \text{ für jedes } a$$

also

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \sin x \, dx = 0$$

Es gilt aber: Ist $f \geq 0$ auf $\mathbb{R}$, so ist

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

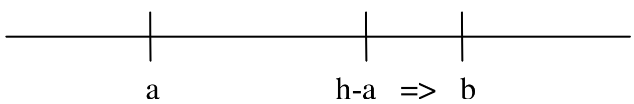
$$= \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} f(x)\,dx + \lim_{a\to-\infty} \int_{b}^{0} f(x)\,dx$$

d.h. beide Methoden führen zum gleichen Ergebnis!

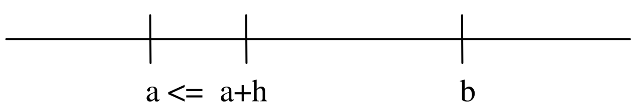
Durch Grenzübergang kann man auch Integrale definieren für Funktionen, die auf $[a,b[$ (oder $]a,b]$) stetig sind, wo aber $\lim_{x\to b} f(x) \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = \pm\infty$ ist.

Dann setzt man

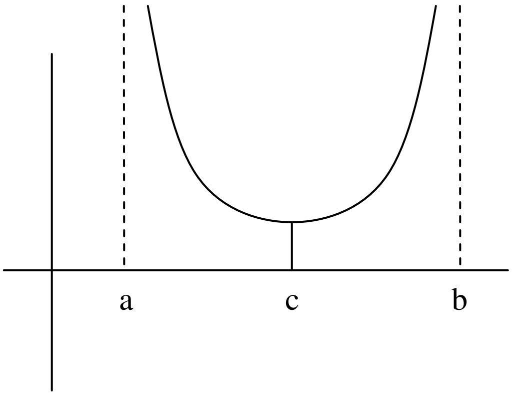
$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} \int_{a}^{b-h} f(x)\,dx \qquad (h > 0, b-h > a)$$



$$\left(\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{x\to 0} \int_{a+h}^{b} f(x)\,dx\right) \qquad (h > 0, a+h < b)$$



falls die Grenzwerte existieren



Sind a und b Unendlichkeitsstellen, wähle $a < c < b$ und setze

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

falls die Integrale auf der rechten Seite existieren.

3. Beispiele

a) Es sei $a < b$. Ist $h > 0$ mit $a + h < b$, so ist

$$\int_{a+h}^{b} \frac{1}{x-a}\,dx = \mathrm{lm}\left|x-a\right|_{a+h}^{b}$$

$$= \ln(b-a) - \underbrace{\ln h}_{\substack{\to -\infty \\ \text{für } h \to 0}}$$

also ist $\int_a^b \frac{1}{x-a}\,dx = \infty$ („existiert nicht“)

z.B. ist (siehe a=0

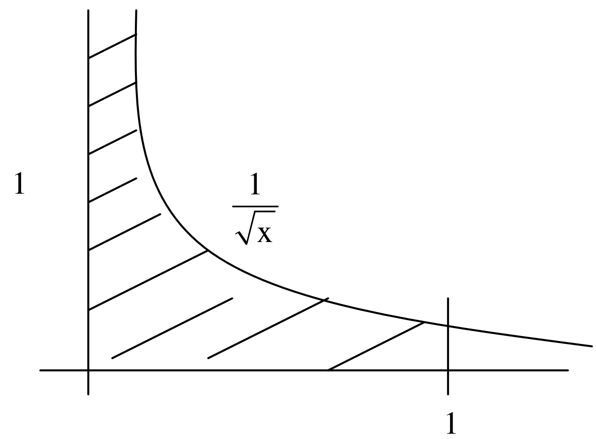
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty$$

$$\left(\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx = -\infty\right)$$

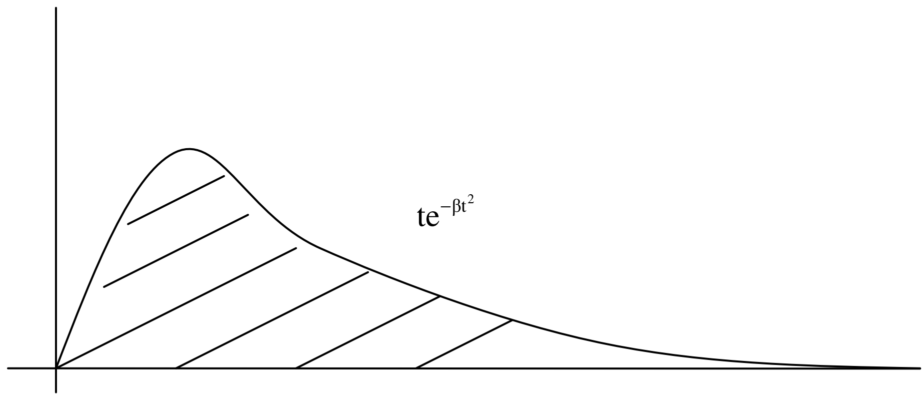
Dagegen gilt

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_h^1$$
$$= 2 - 2\sqrt{h}$$
$$= 2\left(1-\sqrt{h}\right)$$
$$\xrightarrow{h\to 0} 2$$

d.h. $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$



b) Es sei $I(t) = te^{-\beta t^2}$ für $t \geq 0$. Dabei ist $\beta > 0$



Existiert $I = \int\limits_0^\infty I(t)\,dt$?

Stammfunktion zu $I(t)$:

$\int te^{-\beta t^2}\,dt$ Subst. $s = \beta t^2$ $\frac{ds}{dt} = 2\beta t^2 \Rightarrow ds = 2\beta t\,dt$

$= \frac{1}{2\beta}\int e^{-s}\,ds\Big|_{s=\beta t^2}$ $\frac{1}{2\beta}ds = t\,dt$

$$= -\frac{1}{2\beta} e^{-s} \Big|_{s=\beta t^2}$$

$$= -\frac{1}{2\beta} e^{-\beta t^2}$$

$$I_\infty = \lim_{c\to\infty} \int_0^c I(t)\,dt$$

$$= \lim_{c\to\infty} \left(-\frac{1}{2\beta} e^{-\beta t^2} \right) \Big|_0^c$$

$$= \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\beta} \left(1 - \underbrace{e^{-\beta c^2}}_{\to 0} \right)$$

$$= \frac{1}{2\beta}$$

Schriebweise:

$$I_\infty = \int_0^\infty I(t)\,dt$$

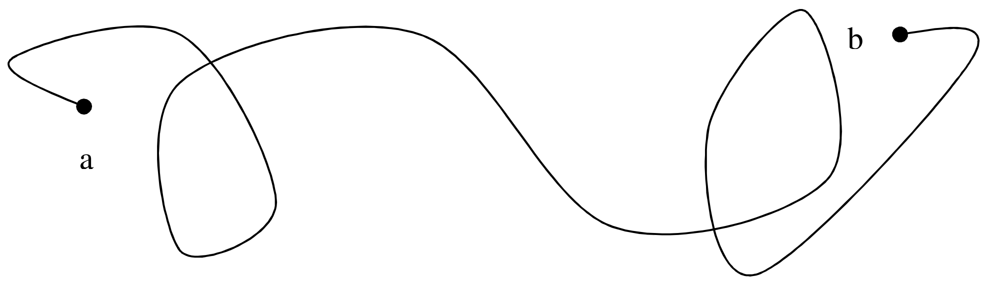
$$= -\frac{1}{2\beta} e^{-\beta t^2} \Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{2\beta} \left(1 - e^{-\beta t^2} \Big|_{t=\infty} \right)$$

$$= \frac{1}{2\beta}$$

3.4 Berechnung von Kurvenlängen

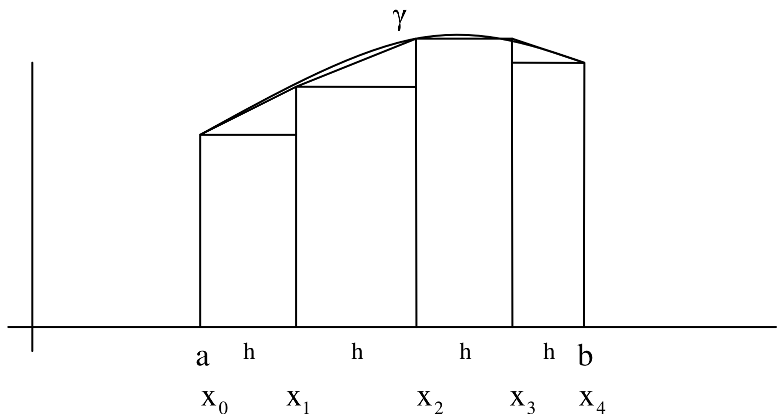
Gegeben sei eine Kurve γ mit dem Anfangspunkt a und dem Endpunkt b:



Gesucht ist die Länge $L(\gamma)$ von γ

$L(\gamma)$ ist dabei definiert als die Länge der Strecke, die entsteht, wenn die Kurve durch ihren Endpunkt zu einer Strecke ausspannt.

Wir setzen voraus, dass γ der Graph einer differenzierbaren Funktion f über $[a,b]$ ist:



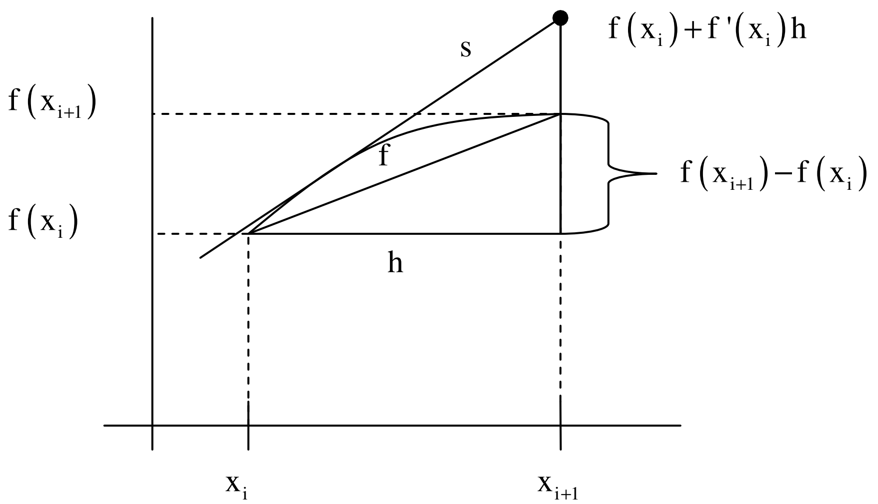
Wähle $n \in \mathbb{N}, h := \frac{b-a}{h}, x_i = a + ih,\ i = 0,...,n$

Dann ist $x_0 = a,\ x_n = b$

L_n sei die Länge des Streckenzugs, der die Punkte $(x_i, f(x_i))$, $i = 0,...,n$, verbindet

Dann ist

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{h^2 + [(x_{i+1}) - f(x_i)]^2}$$



$$\begin{aligned} s &= \sqrt{h^2 + (f'(x_i)h)^2} \\ &= h\sqrt{1 + f'(x_i)^2} \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) - f(x_i) &\underset{\text{Diff-Rechn.}}{\overset{\text{MWS}}{=}} f'(\alpha)\left(\overbrace{x_{i+1} - x_i}^{h}\right) \\ &\approx f'(x_i)h \end{aligned}$$

wobei die Approximation umso besser wird, je kleiner h ist.

Also ist $L_n \approx \sum_{i=0}^{n-1} h\sqrt{1+f'(x_i)^2}$, andererseits ist $\lim_{n\to\infty} L_n = L(\gamma.)$

Setze $g(x) = \sqrt{1+f'(x_i)^2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)\,dx &\underset{\text{ausschöpfung}}{\overset{\text{Rechtecks-}}{=}} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot g(x_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} h\sqrt{1+f'(x_i)^2} \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x)\,dx &= \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} L_n \\ &= L(\gamma) \end{aligned}$$

1. Satz

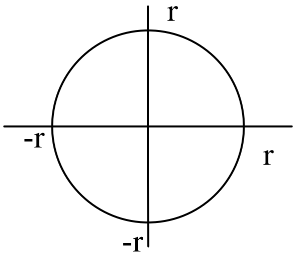
Ist f eine differenzierbare Funktion auf $[a, b]$, so ist die Länge der Kurve γ, die durch den Graphen von f gegeben ist, zu berechnen als

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

(„Kurvenlänge“ = „Bogenlänge“)

2. Beispiele

a) Es soll die Länge des Kreises (um 0) mit Radius r > 0 berechnet werden.



Die Kurvengleichung ist durch $x^2 + y^2 = r^2$ gegeben, d.h.

$$y(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \quad , -r \le x \le r$$

Für $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r, r]$
ergibt sich als Graph des oberen Halbkreises.

Dann ist

$$L(\gamma) = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 - y'(x)^2}\,dx$$

NR:

$$y'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$y'(x)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$1 + y'(x)^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

$$\sqrt{\ldots} = r \bullet \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Also für

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= r\int_{-r}^{r}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx \\
&\underset{\text{sammlung}}{\overset{\text{Formel–}}{=}} r\bullet\arcsin\frac{x}{r} \\
&= r\bullet[\arcsin 1-\arcsin(-1)] \\
&= r\bullet\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \pi r
\end{aligned}$$

Die Länge des Vollkreises ist dann $\underline{L = 2\pi r}$

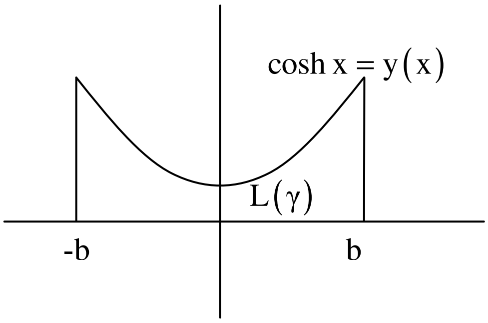
b) Die Gleichung der sog. Kettenlinie γ ist durch $y(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$ $(=\cosh x)$ gegeben.

Dann ist

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right), \\
y'(x)^2 &= \frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}-2\right) \\
1+y'(x)^2 &= \frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}+2\right) \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\right]^2 \\
&= y(x)^2 \\
\sqrt{\ldots} \qquad &= y(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)
\end{aligned}$$

Also ist die Lösung der Kettenlinie über $[-b, b]$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_{-b}^{b}\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)dx \\
&= \int_{-b}^{b}\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\Big|_{-b}^{b} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^b-e^{-b}-e^{-b}+e^b\right) \\
&= e^b-e^{-b}
\end{aligned}$$

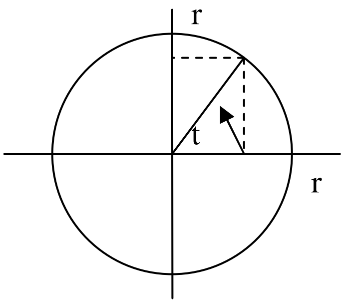


Häufig sind Kurven durch eine sog. Parameterdarstellung gegeben, d.h.

$\gamma : t \to (x(t), y(t))$ (ebene Kurve)

oder $\gamma : t \to (x(t), y(t), z(t))$ (räumliche Kurve) $t \in [a, b]$

Beilspiel: $t \to (r\cos t, r\sin t)$ $, t \in [0, 2\pi]$



$x(t) = r\cos t$
$y(t) = r\sin t$

$x(t)^2 + y(t)^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2$

γ beschriebt also die Kreislinie mit Radius (durchlaufen 1-mal im Gegenuhrzeigersinn)

3. Satz

Ist γ durch eine Parameterdarstellung gegeben, so ist

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt \qquad \left(= \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\,dt \right)$$

4. Beispiele

a) Länge des Kreises mit Radius r:

$$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} r\, dt \\ &= r\int_0^{2\pi} 1\, dt \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

(vgl. die obige umständliche Rechnung!)

b) Länge der Verbindungsstrecke der Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1):

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (x_0, y_0) + t((x_1, y_1) - (x_0, y_0)) \quad , t \in [0,1] \\ &= \underbrace{x_0 + t(x_1 - x_0)}_{x(t)}, \underbrace{y_0 + t(y_1 - y_0)}_{y(t)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2}\, dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\underbrace{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}_{\text{unabh. von t}}}\, dt \\ &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \\ &= \text{Abstand der beiden Punkte} \end{aligned}$$

Kurve γ gegeben durch Parameterdarstellung:

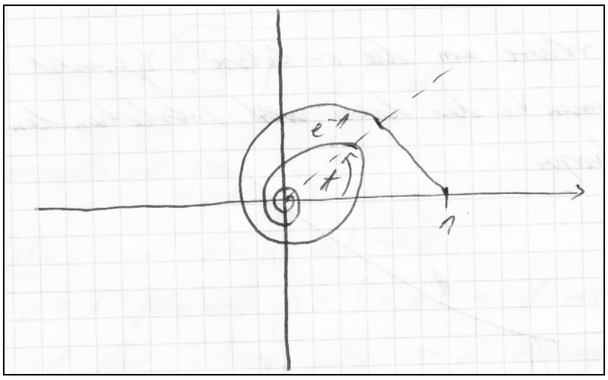
$$\gamma : [a, b] \to (x(t), y(t)) = \gamma(t)$$

Kurvenlänge

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{x}^2}\, dt$$

c) Spirale:

$$\gamma(t) = \left(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t\right),\quad t \in [0,\infty[$$

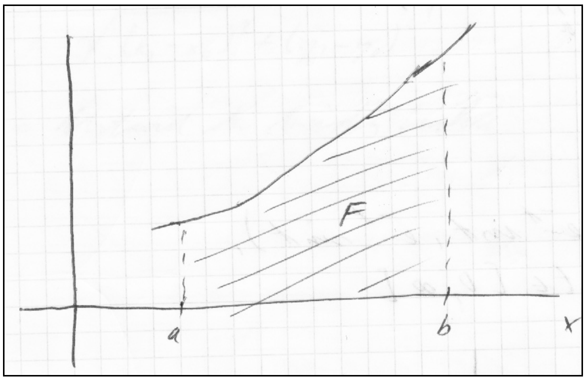


$$\dot{x}(t) = \left(e^{-t}\cos t\right)'$$
$$= -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$$
$$\dot{y}(t) = \left(e^{-t}\sin t\right)'$$
$$= -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t$$
$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \underset{\substack{\text{kleine}\\ \text{Rechn.}}}{=} \sqrt{2} \bullet e^{-t}$$

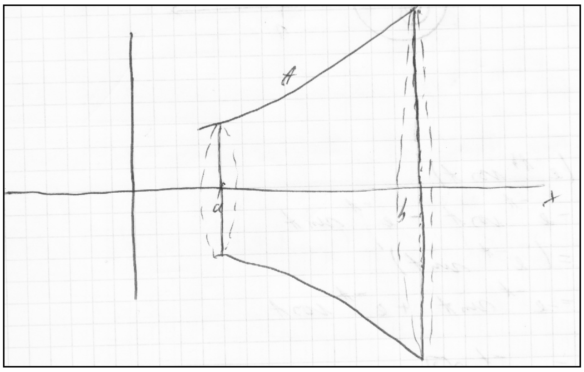
$$L(\gamma) = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-t} = -\sqrt{2}\, e^{-t}\Big|_0^\infty = \sqrt{2}$$

3.5 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern

Gegeben sei eine Funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, es sei $f(x) \geq 0$ überall



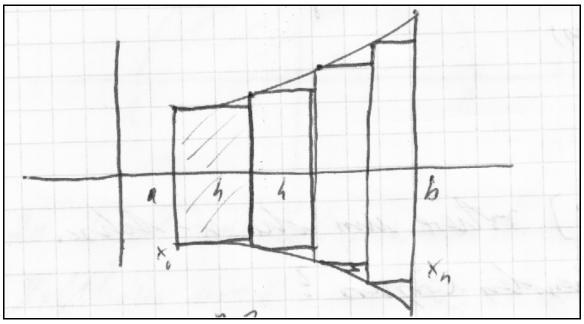
Die Fläche F rotiere um die x-Achse. Gesucht ist das Volumen V des dabei entstehenden „Rotationskörpers“



Das Volumen V wird approximiert durch eine Summe V_n von Volumen, die leicht zu berechnen sind.

Unterteile [a,b] wie zuvor:

$n \in \mathbb{N}, h := \frac{b-a}{n},\ x_k := a + kh,\ k = 0,...,n$ Dann ist $x_0 = a$ und $x_n = b$



Setze

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{f(x_k)^2 \pi}_{\substack{\text{Grundfläche}\\ \text{des Zylinders}}} \bullet h$$

$$= \pi \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)^2 h}_{\xrightarrow[n\to\infty]{h\to} \int_a^b f(x)^2 dx}$$

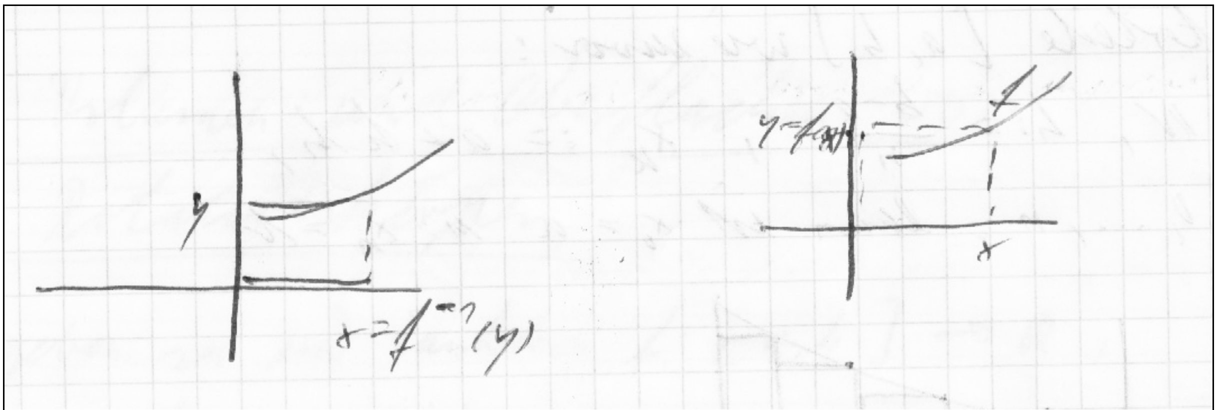
Andererseits ist $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V$

1. Satz

Ist $f:[a,b] \to \mathbb{R};\ f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [a,b] \text{ und } f \text{ stetig}$, so ist das Volumen des von f erzeugtem Rotationskörpers

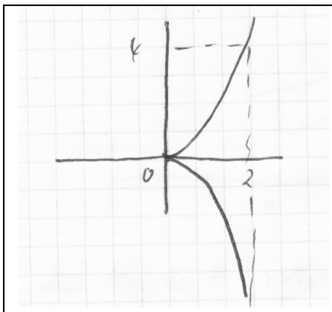
$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

Falls die y-Achse als Rotationsachse auftritt, muss man die den Körper definierende Funktion auf die x-Achse beziehen.

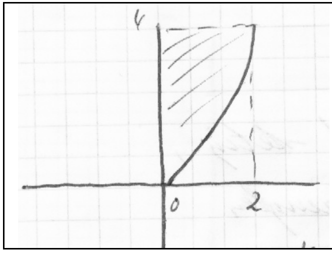


2. Beispiele:

1. $f(x) = x^2,\ x \in [0,2]$ rotiere um die x-Achse. Volumen des entstehenden Körpers?

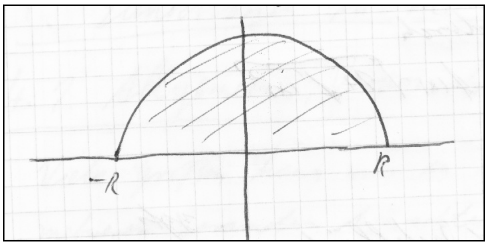
	$V = \pi \int_0^2 f(x)^2\, dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big\vert_0^2 = \frac{32}{5}\pi$

2. $f(x) = x^2,\ x \in [0,2]$ rotiere um die y-Achse. Volumen?

	$g(y) = f^{-1}(y)$ $= \sqrt{y} \qquad y \in [0,4]$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 g(y)^2\,dy \\ &= \pi \int_0^4 y\,dy \\ &= \pi \frac{y^2}{2}\Big|_0^4 \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

3. Volumen einer Gugel mit Radius R



Die Kugel entsteht, wenn man (z.B.) den oberen Halbkreis um 0 mit Radius R um die x-Achse rotieren lässt.

$x^2 + y^2 = R^2$

$y(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad , x \in [-R, R]$

Volumen:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{R}^{-R} y(x)^2 \, dx \\
&= \pi \int_{R}^{-R} (R^2 - x^2) \, dx \\
&= \pi \left[R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right] \Bigg|_{-R}^{R} \\
&= \pi \left[R^3 - \frac{1}{3} R^3 - \left(-R^3 + \frac{1}{3} R^3 \right) \right] \\
&= \pi \left[2R^3 - \frac{2}{3} R^3 \right] \\
&= \frac{4}{3} \pi R^3
\end{aligned}
$$

3. Satz
Die Mantelfläche des durch f definierten Rotationskörpers ist durch

$$O = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx \text{ gegeben.}$$

Achtung: Grund- und Deckfläche sind gesondert zu berechnen

4. Beispiel

$$y(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \qquad x \in [-R, R]$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \\
y'(x)^2 &= 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2} \\
\sqrt{1 + y'(x)^2} &= \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \\
y(x) \bullet \sqrt{1 + y'(x)^2} &= R
\end{aligned}
$$

Also ist die Oberfläche der Kugel mit Radius R gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
0 &= 2\pi \int_{-R}^{R} R \, dx \\
&= 2\pi R \int_{-R}^{R} 1 \, dx \\
&= 2\pi R \underbrace{x \Big|_{-R}^{R}}_{R-(-R)} \\
&= 2\pi R^2
\end{aligned}
$$

4. Funktionen in mehreren Variablen

4.1 Allgemein, Veranschaulichung

Viele Größen kann man in Abhängigkeit von mehreren Parametern betrachten.

z.B. hängt das Volumen eines Zylinders von Radius r und Höhe h ab.

$$V = \pi r^2 h = V(r,h)$$

Veranschaulichung des Graphen einer Funktion f der zwei Variablen x und y:

Falls f nur von einer Variablen abhängt, ist:

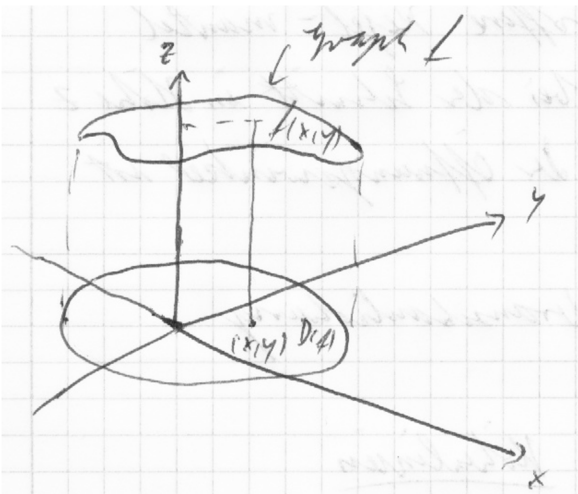
$$\text{Graph } f := \{(x, f(x)), x \in D(f)\}$$

Falls f von x und y abhängt, ist:

$$\text{Graph } f := \left\{ \left(\underbrace{x, y, f(x,y)}_{3\text{Dimensionen}} \right), (x,y) \in D(f) \right\}$$

Im obigen Beispiel ist:

$$\text{Graph } V = \{(x, y, V(x,y)), x \in [0,r], y \in [0,h]\}$$

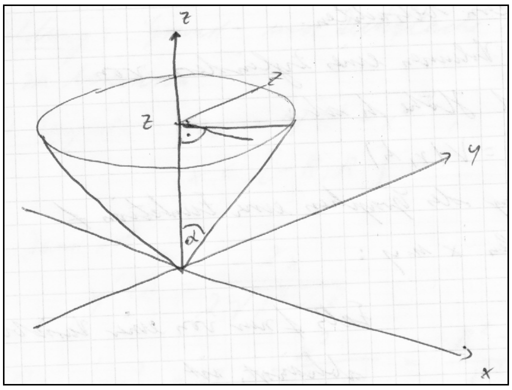


1. Beispiel:

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \qquad x,y \in R, (x,y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R}$

Graph f?

$f(x,y) \geq 0 \quad \text{für alle } x,y$



$x = y = 0 \Rightarrow z = 0$

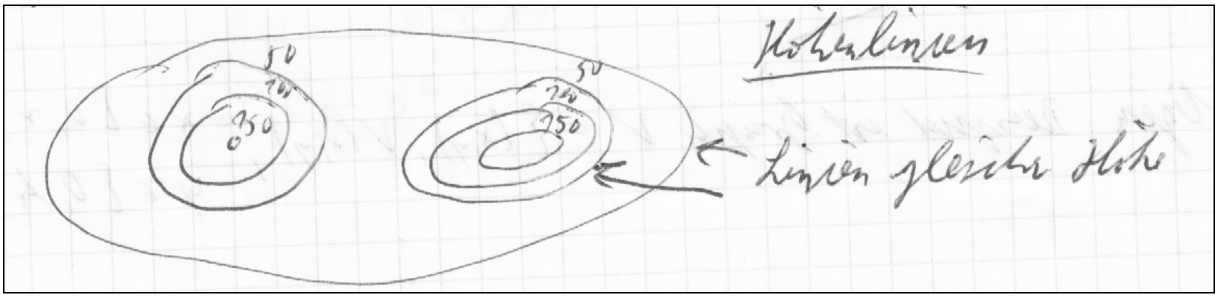
Für welche (x,y) ist $f(x,y)=z$, falls $z>0$ vorgegeben ist!

$\sqrt{x^2+y^2} = z \Leftrightarrow x^2+y^2=z^2$

$\Leftrightarrow (x,y)$ liegt auf dem Kreis um $(0,0)$ mit Radius z

Graph f ist also der nach oben offene Kegelmanten mit Spitze im 0-Punkt, wobei der Schnitt ich Höhe z der Kreis mit Radius z ist. Der Öffnungswinkel ist $2x = \frac{\pi}{2}$

Andere (zweidimensionale!) Veranschaulichung durch so genannte Niveau-Linien:



Höhenlinien

$z = f(x,y)$

Niveaulinien

$c \in \mathbb{R}$ sei gegeben.

$N_c := \{(x, y) \in D(f), f(x, y) = c\}$
heißt die Niveaulinie zu f zum Wert c:

N_c entsteht, wenn man einen Schnitt (parallel zur x-y-Ebene) durch den Graphen von f in der Höhe $z = c$ macht und die Schnittmenge auf die x-y-Ebene projiziert.

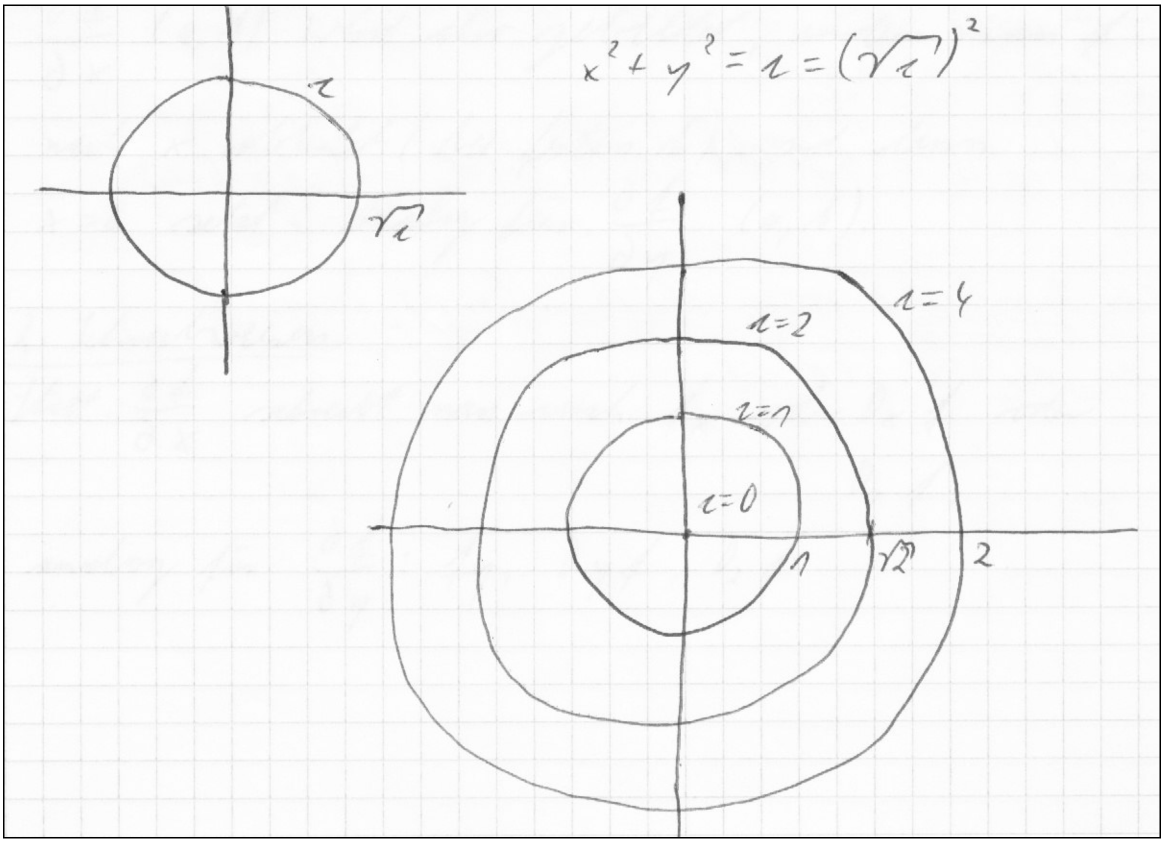
Dabei kann N_c leer sein, au einzelnen Punkten oder aus „Kurven“ bestehen.

2. Beispiele

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dann ist

$N_c = \emptyset$, falls $c < 0$
$N_0 = \{(0,0)\}$
$N_c =$ Kreislinie um $(0,0)$ mit $r = \sqrt{c}$, falls $c > 0$

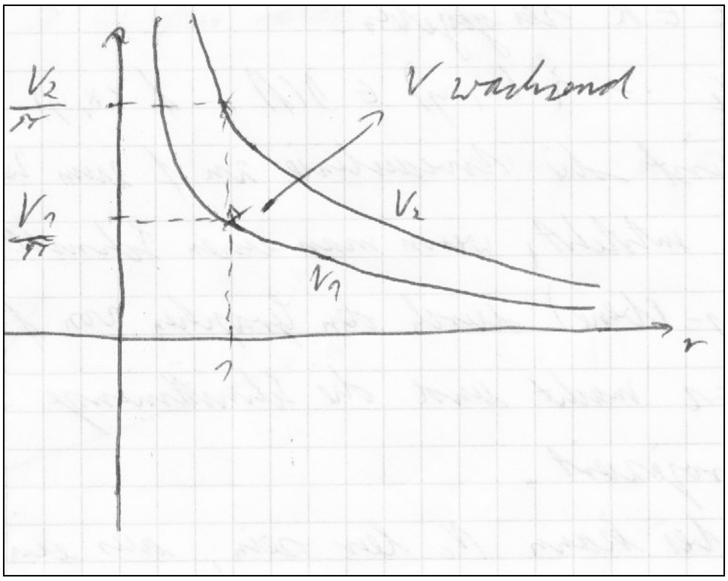
$x^2 + y^2 = c = (\sqrt{c})^2$



b) $V = V(r,h) = \pi r^2 h$

Ist V fest vorgegeben, so ist z.B.

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi} \bullet \frac{1}{r^2}$$



4.2 Partielle Ableitung, Gradient, totales Differential

1. Definition: f sei eine Funktion der Variablen x und y

Setze:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(a+\triangle x, b) - f(a,b)}{\triangle x}$$

Falls der Grenzwert existiert, heißt $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ die partielle Ableitung von f nach x an der Stelle (a,b)

Analog:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(a, b+\triangle y) - f(a,b)}{\triangle y}$$

… nach y …

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ wird also gebildet, indem man f nach x ableitet (bei festem b) und dann $x = a$ setzt.
Analog für $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

2. Schreibweisen

Statt $\frac{\partial f}{\partial x}$ schreibt man auch f_x oder $D_x f$ (oder $D_1 f$)
Analog für $\frac{\partial f}{\partial y}: f_y, D_y f, D_2 f$

3. Beispiele

Ist $f(x,y) := xy^2 + x^3 y$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = y^2 + 3x^2 y \Big|_{(x,y)=(a,b)}$$
$$= b^2 + 3a^2 b$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 2xy + x^3 \Big|_{(x,y)=(a,b)}$$
$$= 2ab + a^3$$

Wenn die partielle Ableitungen f_x und f_y von f auf einer Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ existieren, so sind f_x und f_y auch wieder Funktionen auf M.

Im obigen Beispiel ist dann

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 3x^2 y \\ \text{und} \quad &\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + x^3 \end{aligned}\right\} \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

4. Definition

Falls die partiellen Ableitungen von f in (a,b) existieren, so heißt

$$\nabla f(a,b) = (\operatorname{grad} f)(a,b) := \begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{pmatrix}$$

der Gradient (oder die Ableitung) von f an der Stelle (a,b).

5. Definition

f habe partielle Ableitungen in (a,b). Dann heißt die Ebene

$$\begin{aligned} E: \quad z &= f(a,b) + (\operatorname{grad} f)(a,b) \underbrace{\bullet}_{\text{Skalar-Produkt}} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \\ &= f(a,b) + f_x(a,b) \bullet (x-a) + f_y(a,b) \bullet (y-b) \end{aligned}$$

<u>die Tangentialebene an f in</u> (a,b)

Ortsvektor von E: $\vec{u} = (a, b, f(a,b))$

Richtungsvektor von E: $\vec{v} = (1, 0, f_x(a,b))$

$\vec{w} = (0, 1, f_y(a,b))$

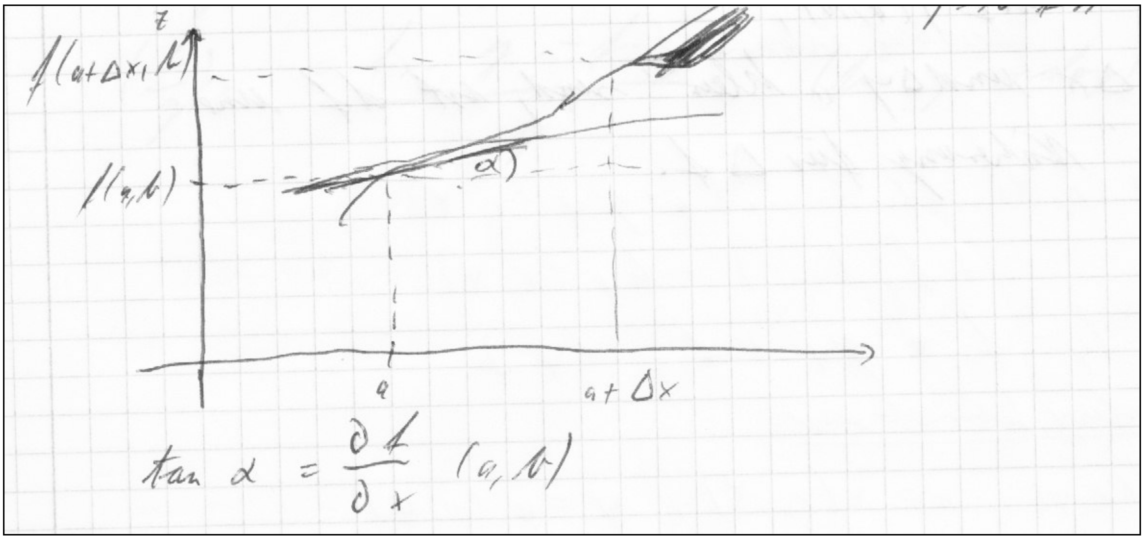
6. Beispiel

Ist $f(x,y) = xy^2 + x^3 y$ und $(a,b) = (2,1)$, so ist die Tangentialebene an f in (a,b) gegeben durch

$f_x = y^2 + 3x^2 y$
$f_y = 2xy + x^3$

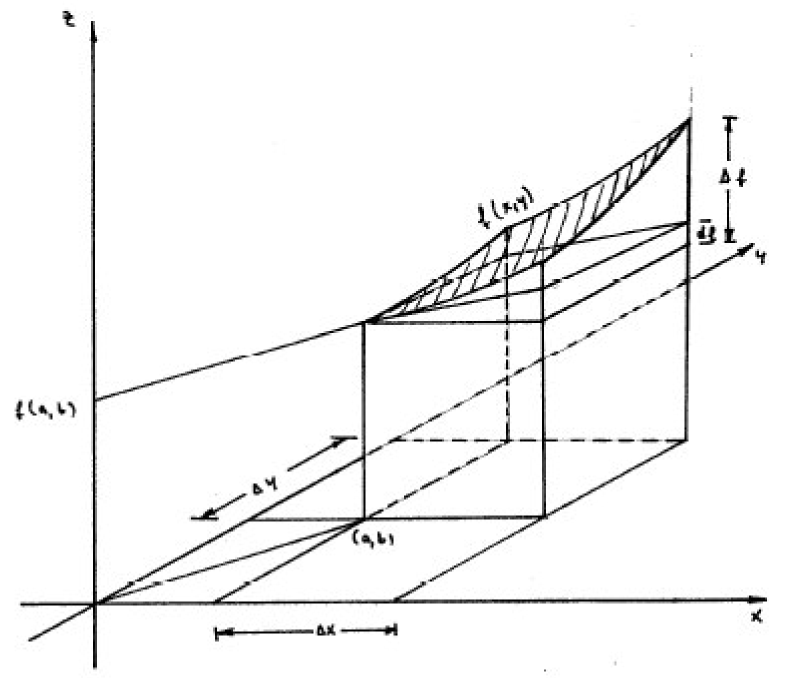
$$t(x,y) = z = 10 + 13(x-2) + 12(y-1) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

partielle Ableitung von f in (a,b):



$$\tan x = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

Tangentialebene an f in (a,b):



$$(df)(a,b) = (\operatorname{grad} f)(a,b) \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

$$= f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

heißt das totale Differential von f in (a,b)

Bedeutung von df:

Setze

$$
\begin{aligned}
(\Delta f)(a,b) &= f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) \\
&= \underbrace{t}_{\substack{\text{Tangential-}\\\text{ebene}}}(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) \\
&= f(a,b) + (\operatorname{grad} f)(a,b)\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} - f(a,b) \\
&= (df)(a,b)
\end{aligned}
$$

falls Δx und Δy „klein" sind, ist df eine „gute" Näherung für Δf

7. Beispiel (Fehlerfortpflanzung)

Ist $V = V(r,h) = \pi r^2 h$, so ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta V}{V} &\approx \frac{dV}{V} \\
&= \frac{V_r \Delta r + V_h \Delta h}{V} \\
&= \frac{2\cancel{\pi}\cancel{r}h\Delta r + \cancel{\pi}r^{\cancel{2}}\Delta h}{\cancel{\pi}r^{\cancel{2}}h} \\
&= 2 \bullet \underbrace{\frac{\Delta r}{r}}_{\substack{\text{relative}\\ r}} + \underbrace{\frac{\Delta h}{h}}_{\substack{\text{Messfehler bzg.}\\ h}}
\end{aligned}
$$

Werden z.B. r und h mit einem Fehler von jeweils 5% gemessen, muss man bei dem daraus berechneten V mit einem Fehler von 15% rechnen.

8. Satz (Rechenregel für partielle Ableitung)

a) Produkt- und Quotientenregel übertragen sich direkt aus dem Fall einer Funktion in einer Variablen

$$(f \bullet g)_x = f_x \bullet g + f \bullet g_x$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)_x = \frac{f_x \bullet g - f \bullet g_x}{g^2} \qquad \text{(für y analog)}$$

b) Kettenregel 1:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x = g(t), y = h(t)$

Dann entsteht die Funktion

$$f(t) := f(g(t), h(t));$$

dafür

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= f_x(g(t),h(t)) \bullet g'(t) + f_y(g(t),h(t)) \bullet h'(t) \\
&= (\operatorname{grad} f)(g(t),h(t)) \underbrace{\bullet}_{\text{Skalarpr.}} \begin{pmatrix} g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

c) Kettenregel 2:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; x = g(r,\varphi), y = h(t,\varphi)$$

Dann entsteht die Funktion

$$f(r,\varphi) = f\left(g(r,\varphi), h(r,\varphi)\right),$$

dafür ist

$$f_r(r,\varphi) = f_x\left(g(r,\varphi),h(r,\varphi)\right)\bullet g_r(r,\varphi) + f_y\left(g(r,\varphi),h(r,\varphi)\right)\bullet h_r(r,\varphi)$$

$$\left[f_r = f_x \bullet g_r + f_y \bullet h_r\right]$$

(Variablen beachten!)

und $f_\varphi(r,\varphi) = f_x(\dots)\bullet g_\varphi + f_y(\dots)\bullet h_\varphi$

$$\left[f_\varphi = f_x \bullet g_\varphi + f_y \bullet h_\varphi\right]$$

<u>alternative Schriebweise</u>

$$f = f(x,y),\quad x = x(r,\varphi), y = y(r,\varphi)$$

$$f(r,\varphi) = f\left(x(r,\varphi), y(r,\varphi)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\bullet\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\bullet\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\bullet\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\bullet\frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

9. Beispiele

<u>zu 8.b)</u>

Es sei $f(x,y) = xy^2$, ferner $x = \underbrace{t^2}_{g(t)}, y = \underbrace{2t}_{h(t)}$

Dann ist:

$$f(t) := f\left(g(t),h(t)\right)$$

$$= t^2 \bullet (2t)^2 = 4t^4$$

$$(\text{also } f'(t) = 16t^3)$$

Mit der Kettenregel ergibt sich:

$$f'(t) = y^2\Big|_{y=2t}\bullet 2t + 2xy\Big|_{x=t^2, y=2t}$$

$$= 8t^3 + 8t^3 = 16t^3$$

zu 8.c) (Kettenregel)

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$x = g(r,\varphi),\ y = h(r,\varphi)$$

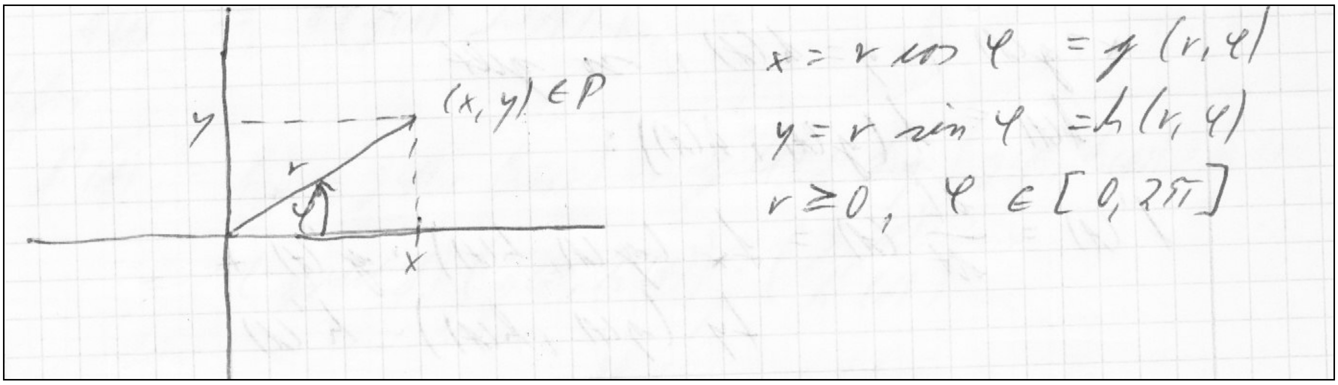
Dann ist

$$f(r,\varphi) := f\left(g(r,\varphi), h(r,\varphi)\right)$$

und es gilt:

$$f_r(r,\varphi) = f_x(\ldots)\cdot g_r(r,\varphi) + f_y(\ldots)\cdot h_r(r,\varphi)$$
$$f_\varphi(r,\varphi) = f_x(\ldots)\cdot g_\varphi(r,\varphi) + f_y(\ldots)\cdot h_\varphi(r,\varphi)$$

Häufig auftretender Fall: Die kartesischen Koordinaten (x,y) werden durch Polarkoordinaten ersetzt.:



$$\frac{\partial}{\partial r} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = f_x(\ldots)\cdot\cos\varphi + f_y(\ldots)\cdot\sin\varphi$$
$$\frac{\partial}{\partial \varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = -rf_x(\ldots)\sin\varphi + rf_y(\ldots)\cdot\cos\varphi$$

10. Definition (Höhere partielle Ableitungen)

Falls die partiellen Ableitungen f_x bzw. f_y wieder partiell differenzierbar sind, so definiert man:

$$f_{xx} := (f_x)_x$$
$$f_{yy} := (f_y)_y$$
$$f_{xy} := (f_x)_y$$
$$f_{yx} := (f_y)_x$$
$$[\text{analog für höhere Ableitungen}: f_{yxxyx} = \ldots]$$

Verwendung des Symbols $\frac{\partial}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial y}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := f_{xx}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial_x \partial_y} := \left(f_y\right)_x \text{ usw.}$$

so zu verstehen:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f = \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f\right)$$

11. Satz

Falls f_{xy} und f_{yx} stetig sind, so ist $f_{xy} = f_{yx}$.

12. Beispiele

$$f(x,y) = y^2 e^{xy}$$

$$f_x(x,y) = y^2 e^{xy} \bullet y = y^3 e^{xy}$$

$$f_y(x,y) = 2y \bullet e^{xy} + y^2 \bullet e^{xy} x = y e^{xy}(2+xy)$$

$$f_{xx}(x,y) = (f_x)_x = y^3 e^{xy} \bullet y = y^4 e^{xy}$$

$$f_{yy}(x,y) = (f_y)_y = \left(e^{xy} + yxe^{xy}\right)(2+xy) + ye^{xy} \bullet x$$

$$f_{xy}(x,y) = (f_x)_y = 3y^2 e^{xy} + xe^{xy} \bullet y^3 = y^2 e^{xy}(3+xy)$$

$$f_{yx}(x,y) = (f_y)_x = y^2 e^{xy}(2+xy) + y^2 e^{xy} = y^2 e^{xy}\left(\underbrace{2+xy+1}_{=3+xy}\right)$$

4.3 Extremstellen bei Funktionen in mehreren Variablen

Es gibt zwei Aufgabenstellungen:

a) Auffinden lokaler Extremstellen (und –werte), woraus ggfs. das globale Maximum bzw Minimum der Funktion gefunden werden kann.

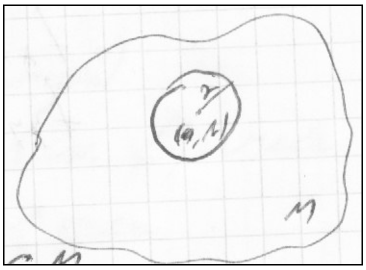
b) Auffinden so genannter Extremstellen und Nebenbedingungen, z.B. auf dem Rand eines Kreises im Definitionsbereich

zu a)

1. Definition

f sei auf einer Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^2$ definiert. Dann heißt $(a,b) \in M$ eine lokale Extremstelle von f, wenn:

i) es ein $r > 0$ gibt, für das $U_r(a,b) := \left\{(x,y) \middle| (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\right\} \subset M$



und

ii) $f(a,b) \geq f(x,y)$ für alle $(x,y) \in U_r(a,b)$

oder $f(a,b) \leq f(x,y)$

Im ersten Falle heißt (a,b) eine lokale Maximumstelle, im zweiten Falle eine lokale Minimumstelle von f

In lokalen Maximum- bzw. Minimumstellen hat man eine waagerechte Tangentialebene, d.h. es gilt:

2. Satz

Ist (a,b) eine lokale Extremstelle von f, so ist

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0 \qquad \left((\operatorname{grad} f)(a,b) = 0\right)$$

3. Beispiele

a) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Dann ist

$f_x = 2x, \quad f_y = 2y$

also $f_x = f_y = 0 \iff x = y = 0$

Der Nullpunkt ist (offenbar) eine lokale (und sogar globale) Minimumstelle:
$f(0,0)=0$
aber $f(x,y)>0, \text{falls} (x,y)\neq(0,0)$

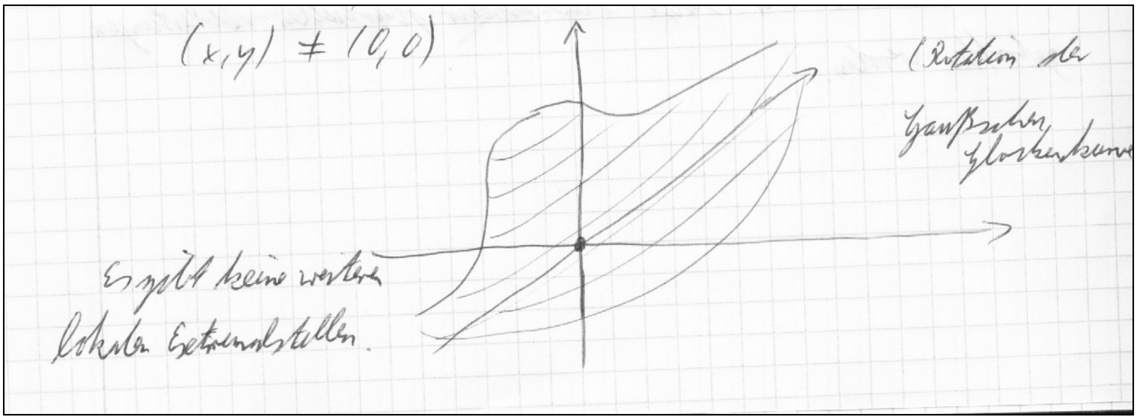
Es gibt keine weiteren lokalen Extremstellen.

b) $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$
Dann ist

$$f_x=(-2x)e^{-(x^2+y^2)}=-2x\,f\left(\overbrace{x,y}^{\neq 0}\right)=0$$

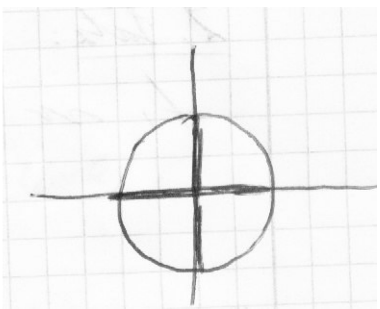
und $f_y(x,y)=-2yf\left(\underbrace{x,y}_{\neq 0}\right)=0$
<=> x = y = 0

$(0,0)$ ist eine lokale (und die globale) Maximumstelle von f:
$f(0,0)=1, \text{aber } e^{-(x^2+y^2)}<1, \text{falls} (x,y)\neq(0,0)$



c) $f(x,y)=x^2-y^2$
Dann ist

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y)=2x=0 \\ f_y(x,y)=-2y=0 \end{array}\right\} <=> x=y=0$$

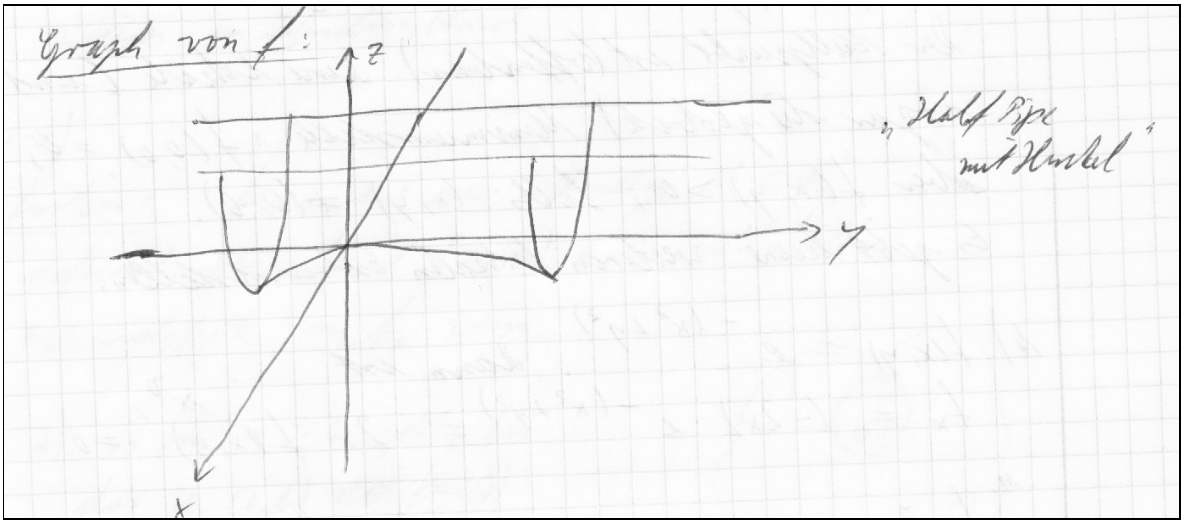


Es ist $f(0,0)=0$

aber $f(x,0)=x^2>0$ für alle $x\neq 0$

und $f(0,y)=-y^2<0$ für alle $y\neq 0$

f hat in $(0,0)$ also keine lokale Extremstelle, sonder einen <u>Sattelpunkt</u>.



Für festes y ist $f(x,y)=x^2-y^2$, also eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel in $(0,-y^2)$

Eine Entscheidung über das Vorliegen einer Extremstelle kann also nicht mit Hilfe der ersten partiellen Ableitung getroffen werden.

4. Definition

Falls die zweiten partiellen Ableitungen von f existieren, heißt die Matrix

$$H_y(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

die <u>Hessesche Matrix zu f.</u>

i.a. ist $f_{xy}=f_{yx}$, d.h. $H_f(x,y)$ ist symmetrisch!

5. Satz

Es sei $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$, (x,y) also ein kritischer Punkt von f .
Dann gilt:

a) (x,y) ist eine lokale Maximalstelle von f, falls

$$f_{xx}(x,y)<0 \text{ und } \det H_f(x,y)=f_{xx}f_{yy}-\underbrace{f_{xy}f_{yx}}_{(f_{xy})^2}>0$$

b) (x,y) ist eine lokale Minimumstelle von f, falls

$$f_{xx}(x,y) > 0 \text{ und } \det H_f(x,y) > 0$$

c) Ist $\det H_f(x,y) < 0$, so liegt keine lokale Extremstelle von f in (x,y) vor, sondern ein Sattelpunkt.

d) Ist $\det H_f(x,y) = 0$, so ist keine allgemeine Entscheidung möglich.

6. Beispiele

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$
Dabei ist

$$f_x = f_y = 0 <=> (x,y) = (0,0)$$
$$f_{xx} = 2,\ f_{yy} = 2,\ f_{xy} = 0 = f_{yx}$$
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$f_{xx} = 2 > 0,\ \det H_f(x,y) = 4 > 0$$

Nach 5b) ist $(0,0)$ eine lokale Minimumstelle

b) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$
Dabei ist

$$\left.\begin{aligned} f_x &= -2xe^{-(x^2+y^2)} \\ f_y &= -2ye^{-(x^2+y^2)} \end{aligned}\right\} = 0,\ <=>\ x = y = 0$$
$$f_{xx} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2e^{-(x^2+y^2)}$$
$$f_{yy} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{xx}(0,0) = -2 = f_{yy}(0,0)$$
$$f_{xy}(0,0) = 0 = f_{yx}(0,0)$$
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$f_{xx} < 0,\ \det H_f(0,0) = 4 > 0$$

also ist $(0,0)$ eine lokale Maximumstelle von f.

c) $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\left.\begin{matrix} f_x = 2x \\ f_y = -2y \end{matrix}\right\} = 0 \iff x = y = 0$$

$f_{xx} = 2$

$f_{yy} = -2$

$f_{xy} = 0 = f_{yx}$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$f_{xx} = 2 > 0,\ \det H_f = -4 < 0 \Rightarrow (0,0)$ ist also ein Sattelpunkt

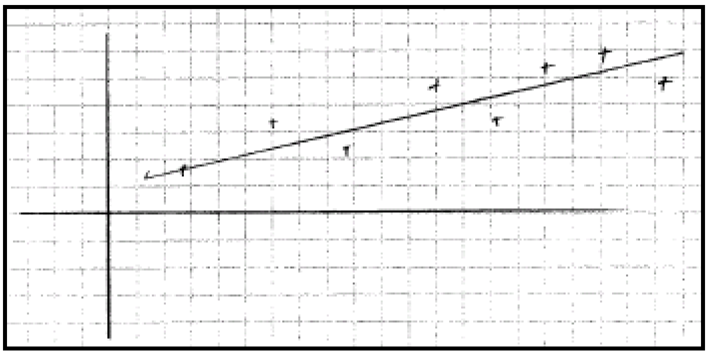
7. Beispiel (Konstruktion der so genannten Ausgleichsgeraden)

Gegeben seien n Punkte $(x_i, y_i), i = 1,...,n$ in der Ebene, z.B. entstanden aus einer Wertetabelle

x_i	y_i
x_1	y_1
x_2	y_2
...	...
x_n	y_n

(<= Messwerte zum Parameter x_i

Gesucht wird eine Gerade, die diesen Punkten „optimal" angepasst ist.



Falls diese Punkte auf einer Geraden G liegen, ist G sicher diese „optimale Gerade"

Was soll „optimal" bedeuten?

Die gesuchte Gerade G wird durch

$$y(x) := ax + b$$

angesetzt. Dabei sollen a und b so gewählt werden, dass der so genannte <u>quadratische Gesamtfehler</u>

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y(x_i) - y_i\right)^2$$

minimal wird.

Es ist

$$f(a,b) := \sum_{i=1}^{n}\left(y(x_i)-y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i+b-y_i\right)^2$$

eine Funktion von a und b. Gesucht wird die globale Minimumstelle für f.

Bestimme die kritischen Punkte von f:

$$f_a(a,b) = \sum_{i=1}^{n} 2\left(ax_i+b-y_i\right)x_i$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i^2+bx_i-x_iy_i\right)$$

$$f_b(a,b) = \sum_{i=1}^{n} 2\left(ax_i+b-y_i\right)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i+b-y_i\right)$$

$$f_{aa}(a,b) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$f_{bb}(a,b) = 2\sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= 2n$$

$$f_{ab}(a,b) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i = f_{ba}(a,b)$$

Ein kritischer Punkt liegt in (a,b) vor, falls $f_a(a,b) = f_b(a,b) = 0$, d.h.

$$\sum_{n=1}^{n} ax_i^2 + \sum_{n=1}^{n} bx_i - \sum_{n=1}^{n} x_iy_i = 0$$

$$a\sum_{n=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{n=1}^{n} x_i = \sum_{n=1}^{n} x_iy_i \qquad (1)$$

und

$$\sum_{n=1}^{n} ax_i + \sum_{n=1}^{n} b - \sum_{n=1}^{n} y_i = 0$$

$$a\sum_{n=1}^{n} x_i + bn = \sum_{n=1}^{n} y_i \qquad (2)$$

(1) und (2) bilden ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten a und b, in Matrixform

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_iy_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

Die damit aufgestellte Gerade mit der Gleichung

$$y(x) = ax + b$$

heißt die Ausgleichsgerade zur Wertetabelle $(x_i, y_i), i = 1,...,n$

Die Hessische Matrix zu f hat die Form:

$$H_f(a,b) = \begin{pmatrix} f_{aa} & f_{ab} \\ f_{ab} & f_{bb} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix}$$

Es ist $\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0}$ und $\boxed{\det H_f(a,b) = n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 > 0}$ (zu beweisen!)

(falls nicht alle x_i gleich sind)

Nach Satz 5 ist in (a.b) ein lokales Minimum von f. Da es nur einen kritischen Punkt gibt, liegt hier auch das globale Minimum von f.

8. Beispiel

Gegeben die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5
y	3,2	4,95	6,98	9,12	10,89

(liegen „fast“ auf einer Geraden)

$$n = 5$$
$$\sum x_i = 15$$
$$\sum x_i^2 = 55$$
$$\sum y_i = 35{,}14$$
$$\sum x_i y_i = 124{,}97$$

zu lösen also:

$$\begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 124{,}97 \\ 35{,}14 \end{pmatrix} + \quad \bullet(-3)$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19{,}55 \\ 35{,}14 \end{pmatrix}$$

$$a = 1{,}955$$
$$b = 1{,}163$$

Die Gleichung der Ausgleichsgeraden ist also $y(x) = 1{,}955x + 1{,}163$

f sei eine Funktion der Variablen $x_1, x_2, ..., x_n$

$\frac{\partial}{\partial x} f(x_1,...,x_n) = f_{x_i}(x_1,...,x_n)$ sei die partielle Ableitung von f nach x_i an der Stelle $(x_1,...,x_n)$.

Die Hessische Matrix zu f ist dann definiert durch

$$H_f(x_1,...,x_n) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & ... & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & ... & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & ... & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & ... & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & ... & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & ... & f_{nn} \end{pmatrix}$$

falls $f_{ij} := f_{x_ix_j}$ gesetzt wird.

H_f ist symmetrisch, falls die zweite partielle Ableitung stetig ist.

9. Satz

f sei eine Funktion der Variablen $x_1,...,x_n$. Die zweiten partiellen Ableitungen von f seien stetig.

Dann gilt:

a) Ist $(x_1,...,x_n)$ eine lokale Extremstelle von f, so ist

$$(\text{grad} f)(x_1,...,x_n) = (f_1(x_1,...,x_n),...,f_n(x_1,...,x_n)) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(...),...,\frac{\partial}{\partial x_n} f(x_1,...,x_n)\right) = 0$$

b) Ist $(\text{grad} f)(x_1,...,x_n) = 0$ und gilt für die Abschnittsmatrizen

$$H_i = \begin{pmatrix} f_{11} & ... & f_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{1i} & ... & f_{ii} \end{pmatrix}$$, dass $\det H_1 < 0$ und die Vorzeichen von H_i alternieren,

so ist $x_1,...,x_n$ eine lok. Maximumstelle;

ist $\det H_1 > 0$ für alle $i = 1,...,n$, so ist $(x_1,...,x_n)$ eine lok. Minimumstelle

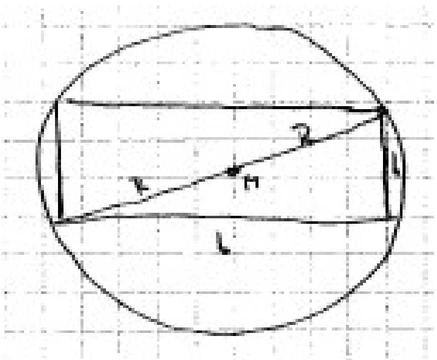
Als Spezialfall für n = 2 ergeben sich einige Aussagen aus Satz 5.

zu b)

Extremwerte unter Nebenbedingungen

10. Beispiel

Aus einem Kreis mit Radius R soll ein Rechteck ausgeschnitten werden,
so dass die Größe $E = \frac{1}{6} bh^2$ möglichst groß wird.
(vgl. Skizze)



Also soll das Maximum der Funktion

(1) $W(b,h) = \frac{1}{6} bh^2$

bestimmt werden, wobei b und h durch die <u>Nebenbedingung</u>

(2) $b^2 + h^2 = (2R)^2 = 4R^2$

d.h. $b^2 + h^2 - 4R^2 = 0$

verknüpft sind.
Aufgabe leicht direkt lösbar: löse (2) auf nach h^2:

$$h^2 = 4R^2 - b^2$$

und setze dies in (1) ein:

$$\begin{aligned} W(b) &= W\left(b, \sqrt{4R^2 - b^2}\right) \\ &= \frac{1}{6} b\left(4R^2 - b^2\right) \\ &= \frac{4}{6} bR^2 - \frac{1}{6} b^3 \\ &= \frac{2}{3} bR^2 - \frac{1}{6} b^3 \end{aligned}$$

kritischer Punkt: $W'(b)=\frac{2}{3}R^2-\frac{1}{2}b^2=0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}R^2=\frac{1}{2}b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2=\frac{4}{3}R^2$$

$$b>0, R>0 \quad \Leftrightarrow \quad b=\frac{2}{\sqrt{3}}R$$

Das zugehörige h ergibt sich aus

$$\begin{aligned} h^2 &= 4R^2-b^2 \\ &= 4R^2-\frac{4}{3}R^2 \\ &= \frac{8}{3}R \\ h &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}R \end{aligned}$$

Dafür ist

$$\begin{aligned} W(b,h) &= \frac{1}{6}bh^2 \\ &= \frac{1}{6}\bullet\frac{2}{\sqrt{3}}R\bullet\frac{8}{3}R^2 \\ &= \frac{16}{18\sqrt{3}}R^3 \\ &= \frac{8}{9\sqrt{3}}R^3 \end{aligned}$$

Das hat funktioniert, weil man die Nebenbedingung „nach h^2“ auflösen konnte und den gewonnen Ausdruck unmittelbar zur Elimination von h^2 in $W(b,h)$ verwenden konnte.

Für $w(b,h)=\frac{1}{6}bh^2$ soll der Maximalwert bestimmt werden unter der Nebenbedingung , dass $b^2+h^2-4R^2=0$ (*)

1. Lösungsweg

(*) wird nach h^2 aufgelöst und damit h aus der Funktion w eliminiert. Dann wird W als Funktion in einer Variablen (nämlich b) auf Extremwerte untersucht.

Nicht immer ist diese Elimination eindeutig möglich.

11. Beispiel
Bestimme Maximum und Minimum der Funktion: $f(x,y) = xy$ auf dem Rande des Einheitskreises, d.h. unter der Nebenbedingung, dass

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (*)$$

ist, d.h. $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Auflösen von (*) nach y:

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}, \qquad x \in [-1,1]$$

Frage: Mit welchem Vorzeichen arbeiten ???
Die Charakterisierung der Extremstellen mit Mitteln der Differentialrechnung gilt nur für Punkte $x \in]-1,1[$, nicht für Randpunkte.

<u>Alternative Methode:</u>

Bestimmung von Extremstellen unter Nebenbedingungen mit Hilfe des so genannten <u>Lagrange-Multiplikators</u>.

Es sollen die Extremalstellen der Funktion

$$z = f(x,y)$$

bestimmt werden unter der <u>Nebenbedingung</u>, dass (x,y) die Gleichung

$$g(x,y) = 0 \quad (!)$$

erfüllt.

Dazu wird eine Hilfsgröße λ (= der „Lagrange-Multiplikator“) eingeführt und damit die Funktion

$$h(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \bullet g(x,y)$$

gebildet.

12. Satz:
Wenn f in (x,y) eine Extremalstelle hat mit $g(x,y) = 0$, so ist

$$\boxed{\begin{array}{l} h_x(x,y,\lambda) = f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0 \\ h_y(x,y,\lambda) = f_y(x,y) + \lambda g_y(x,y) = 0 \\ h_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = 0 \\ (\text{die 3. Gleichung ist einfach die Nebenbedingung}) \end{array}}$$

$h_x = h_y = h_\lambda = 0$ ist wieder eine <u>notwendige Vorraussetzung</u> für das Vorliegen einer Extremalstelle. Das an der gegebenen Stelle wirklich ein Extremum vorliegt, ist wieder getrennt zu überlegen.

13. Beispiel

Setze $f(x,y) = xy$ und als Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Setze: $h(x,y,\lambda) = xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$

Notwendig für das Vorliegen einer Extremalstelle ist:

(i) $h_x = y + 2\lambda x = 0$
(ii) $h_y = x + 2\lambda y = 0$
(iii) $h_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$

(i) und (ii) führen zu

$$y = -2\lambda x, \quad y^2 = 4\lambda^2 x^2$$
$$x = -2xy, \quad x^2 = 4\lambda^2 y^2,$$

also zu

$$\underbrace{x^2 + y^2}_{\substack{=1 \\ (iii)}} = 4\lambda^2 \left(\underbrace{x^2 + y^2}_{=1} \right)$$

d.h. zu $4\lambda^2 = 1,\ \lambda = \pm\frac{1}{2}$

Also ist

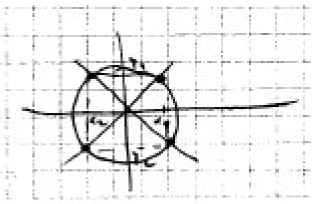
$$y = \pm x \qquad (x = \pm y)$$

aus (iii) folgt also

$$x^2 + y^2 = 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Es gibt also 4 „Kandidaten“ für Extremalstellen auf dem Einheitskreis .

$$(x_1, y_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\ (x_2, y_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1),\ (x_3, y_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1),\ (x_4, y_4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$



Es ist

$$f(x_1, y_1) = x_1 \bullet y_1 = \frac{1}{2} = f(x_3, y_3)$$
$$f(x_2, y_2) = -\frac{1}{2} = f(x_4, y_4)$$

Weil für $x = 0$ bzw $y = 0$ jeweils $f(x,y) = x \bullet y = 0$ ist, sind

(x_1, y_1) und (x_3, y_3) Maximumstellen
und (x_2, y_2) und (x_4, y_4) Minimumstellen

Test der Multiplikatormethode am Beispiel (s.0.):

$$w(b,h) = \frac{1}{6} bh^2$$

Nebenbedingung: $b^2 + h^2 - 4R^2 = 0$

Ansatz:

$$h(b,h,\lambda) = \frac{1}{6} bh^2 + \lambda\left(b^2 + h^2 - 4R^2\right)$$

zu lösen sind die 3 Gleichungen:

i) $h_b = \frac{1}{6} h^2 + 2\lambda b$

ii) $h_h = \frac{1}{3} bh + 2\lambda h$

iii) $h_\lambda = b^2 + h^2 - 4R^2$

ii) => $\frac{1}{3} bh = -2\lambda h$ (gesucht ist der Maximalwert von W, also ist h > 0),

d.h. $\lambda = -\frac{1}{6} b$

Einsetzen in i):

$$\frac{1}{6} h^2 - \frac{1}{3} b^2 = 0,$$
$$h^2 = 2b^2$$

Einsetzen in iii):

$$b^2 + 2b^2 - 4R^2 = 0$$
$$3b^2 = 4R^2$$
$$b = \frac{2}{\sqrt{3}} R$$

(nach Aufgabenstellung ist b > 0!)

$$h^2 = 2b^2$$
$$h = \sqrt{2} b$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} R$$

$$W_{max} = W(b,h) = \frac{1}{6} bh^2$$

$$= \frac{1}{6} \bullet \frac{2}{\sqrt{3}} R \bullet \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^2 R^2$$

$$= \frac{8}{9\sqrt{3}} R^3$$

4.4 Integralrechnung für Funktionen in mehreren Varianten
(„Mehrfachintegrale")

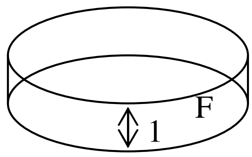
1. Beispiel

Ist F ein ebenes Flächenstück und ist darauf eine elektrische Ladung mit der Dichte $\delta(x, y)$ verteilt, so ist die Gesamtladung gegeben durch das Integral:

$$\int_F \delta(x, y)\,dF$$

das Flächenintegral von δ über F

Dann liefert $\int_F 1\,dF$
den Flächeninhalt von F



Ist analog $\delta(x, y, z)$ die Dichte einer Substanz, die in einem dreidimensionalem Körper V verteilt ist, so ist die Gesamtmenge dieser Substanz in V durch

$$\int_V \delta(x, y, z)\,dV$$

gegeben, das Volumenintegral von δ über V

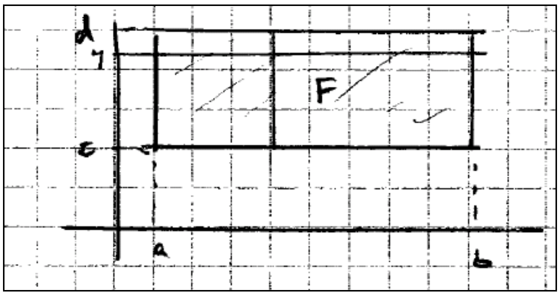
2. Satz

Ist $\delta(x, y, z) = 1$, so ist
$$\int_V 1\,dV$$
das Volumen des Körpers V.

Die Berechnung von Flächen- bzw. Volumenintegralen durch Auflösen in zwei (bzw. drei) Integrale, wobei jeweils bzgl. einer Variablen integriert wird.
Dafür werden nachfolgend nur wichtige Standardbeispiele behandelt und keine allgemeine Theorie.

Flächenintegralen:

a) Integration über ein Rechteck:
$F = [a, b]x[c, d]$
$= \{(x, y)\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$



x und y variieren unabhängig voneinander

$$\int_F f(x,y)\,dF := \int_c^d \left(\underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{\text{bei festem } y} \right) dy$$

$$= \int_a^b \left(\underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{\text{bei festem } x} \right) dx$$

Beispiel: $f(x,y) = 1 + x^2 y^2$

$F = [0,1] \times [0,2]$

$$\int_F \left(1 + x^2 y^3\right) dF = \int_0^2 \left(\int_0^1 \left(1 + x^2 y^3\right) dx \right) dy$$

$$= \int_0^2 \left(x + \frac{1}{3} x^3 \bullet y^3 \right) \Big|_{x=0}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^2 \left(1 + \frac{1}{3} y^3 \right) dy$$

$$= y + \frac{1}{12} y^4 \Big|_0^2$$

$$= 2 + \frac{16}{12}$$

$$= 2 + \frac{4}{3}$$

$$= 3\frac{1}{3}$$

analog: $\int_0^1 \left(\int_0^2 \left(1 + x^2 y^3\right) dy \right) dx = \ldots = 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

Integration über Rechtecke:

$$F = \{(x, y) | a \le x \le b, \quad c \le y \le d\}$$

$$\int_F f(x, y)\,dF := \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy$$
$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy \right) dx$$

<u>Spezialfall:</u> Ist $f(x, y) = g(x) \bullet h(y)$ mit zwei Funktionen g und h, so ist

$$\int_F f(x, y)\,dF = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy$$
$$= \int_c^d \left(\int_a^b g(x) \bullet h(y)\,dx \right) dy$$
$$= \int_c^d \left(h(y) \int_a^b g(x)\,dx \right) dy$$
$$= \int_a^b g(x)\,dx \bullet \int_c^d h(y)\,dy$$

3. Beispiel

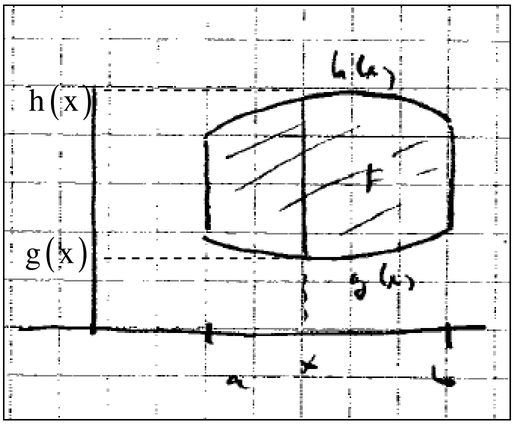
$$f(x, y) = x^2 y^3$$
$$= g(x) \bullet h(y)$$

$$F = [0,1] \, x \, [0, 2]$$

$$\int_F f(x, y)\,dF = \int_c^d \left(\int_a^b x^2 y^3 \,dx \right) dy$$
$$= \int_c^d \left(y^3 \int_a^b x^2 dx \right) dy$$
$$= \int_0^1 x^2 dx \bullet \int_0^2 y^3 dy$$
$$= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \bullet \frac{1}{4} y^4 \Big|_0^2$$
$$= \frac{1}{3} \bullet \frac{16}{4}$$
$$= \frac{4}{3}$$

b) Integration über Flächenstücke, bei denen der Laufbereich einer Variablen vom aktuellen Wert der anderen Variablen abhängt.

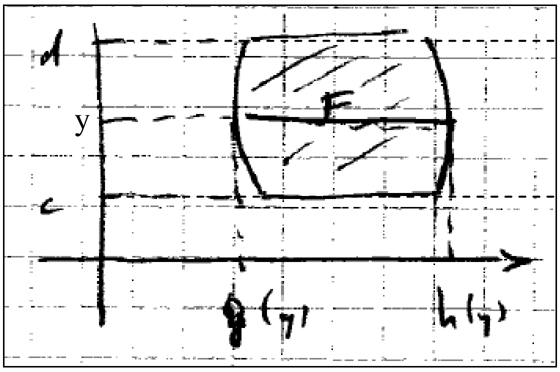
$x \in [a, b]$
$y \in [g(x), h(x)]$



$$\int_F f(x, y)\,dF := \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,dy \right) dx$$

<u>oder:</u>

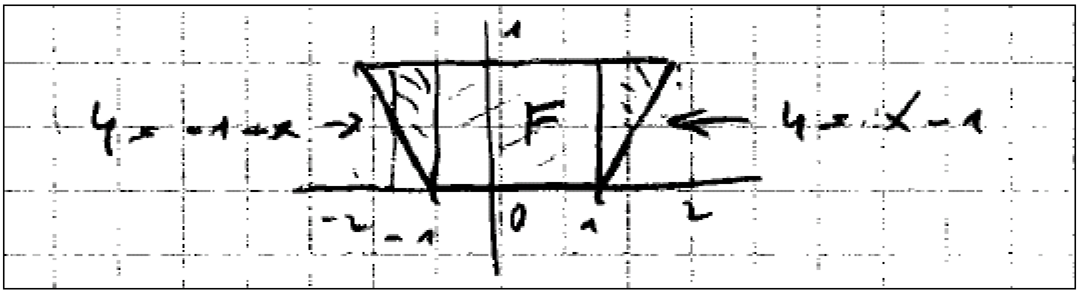
$y \in [c, d]$
$x \in [g(y), h(y)]$



$$\int_F f(x, y)\,dF := \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\,dx \right) dy$$

4. Beispiele

a)



Beschreibung von f durch Koordinaten:

$$x \in [-2,2]$$

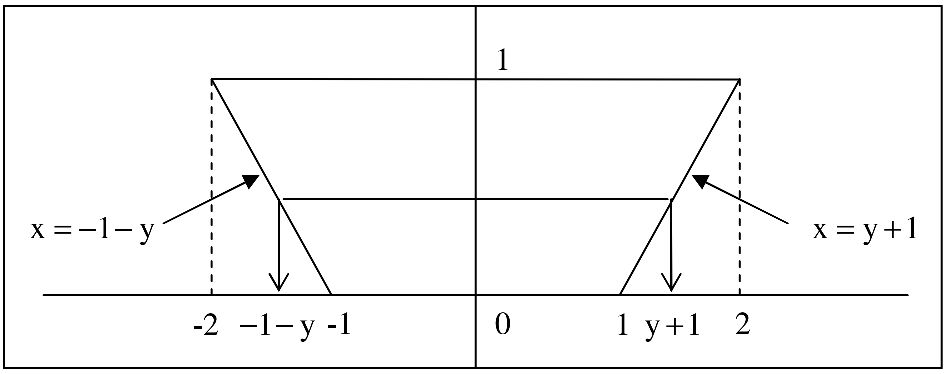
$$y \in \begin{cases} [-1-x,1], \text{falls } x \in [-2,-1] \\ [0,1], \text{falls } x \in [-1,1] \\ [-1+x,1, \text{falls } x \in [1,2] \end{cases}$$

Also ist:

$$\int_F f(x,y)\,dF = \int_{F_1} f(x,y)\,dF_1 + \int_{F_2} f(x,y)\,dF_2 + \int_{F_3} \ldots$$

$$= \int_{-2}^{-1}\left(\int_{-1-x}^{1} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{1}^{2}\left(\int_{x-1}^{1} f(x,y)\,dy\right)dx$$

<u>oder:</u>



$$y = -1 - x$$

$$x = -1 - y$$

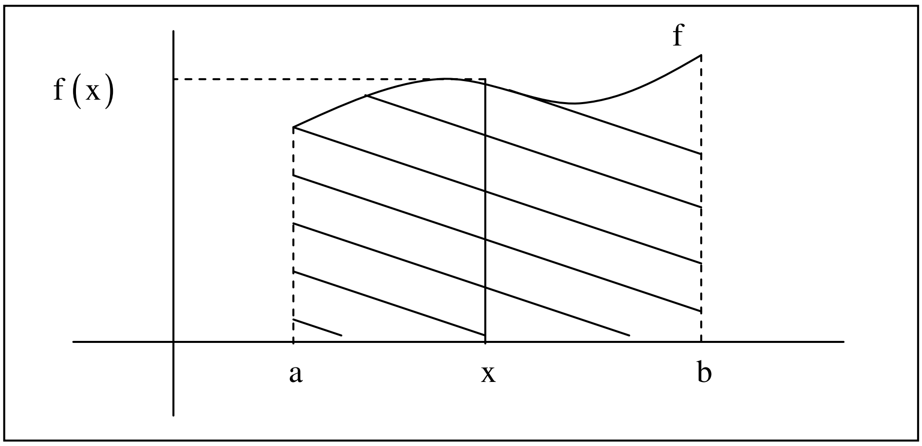
$$y = x - 1$$

$$x = y + 1$$

$$\int_F f(x,y)\,dF = \int_0^1 \left(\int_{-y-1}^{y+1} f(x,y)\,dx\right)dy$$

$\int_F 1 \, dF$ liefert den Flächeninhalt von F.

$F = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ 0 \le y \le f(x)\}$, wobei f eine Funktion ist.



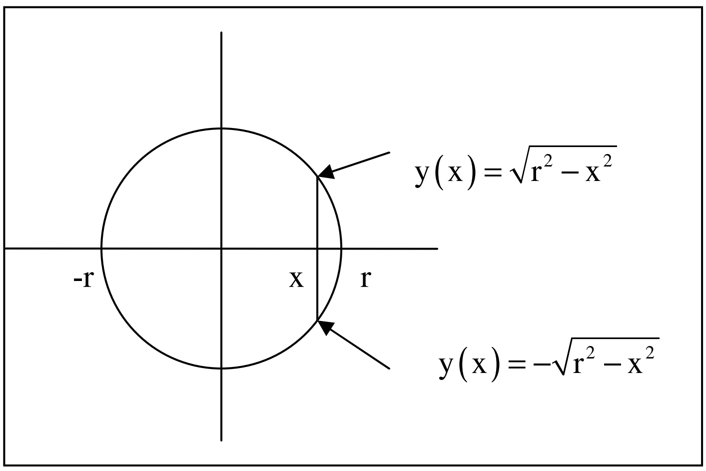
Dann ist:

$$\int_F 1 \, dF = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} 1 \, dy \right) dx$$
$$= \int_a^b \left(y \Big|_0^{f(x)} \right) dx$$
$$= \int_a^b f(x) \, dx$$

5. Beispiel
Bestimme die Flächeninhalt des Kreises um 0 mit Radius r.

Kreisgleichung:
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \qquad x \in [-r, r]$$

$$F = \left\{ (x,y) \mid x \in [-r,r],\quad y \in [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}] \right\}$$



Der Flächeninhalt ist gegeben durch

$$\int_F 1\,dF = \int_{-r}^{r}\left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1\,dy\right)dx$$

$$= \int_{-r}^{r}\left(y\Big|_{-\sqrt{\dots}}^{\sqrt{\dots}}\right)dx$$

$$= \int_{-r}^{r}\left(\sqrt{\dots}-\left(-\sqrt{\dots}\right)\right)dx$$

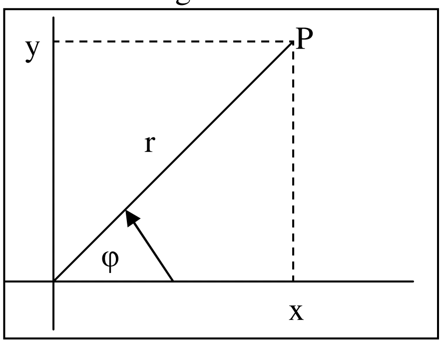
$$= 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$\underset{\text{sammlung}}{\overset{\text{Formel-}}{=}} 2r^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{r}\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}+\arcsin\frac{x}{r}\right)\right)\Bigg|_{x=-r}^{r}$$

$$= 2r^2 \bullet \frac{1}{2}\pi$$

$$= \pi r^2$$

Bei manchen Flächenstücken bzw. Integranden führt der Übergang zu Polarkoordinaten zu Vereinfachungen.



kart. Koordinaten

$P = (x, y) \quad x, y \in \mathbb{R}$

$= (r, \varphi) \quad r \geq 0,\ \varphi \in [o, 2\pi[$

Polarkoordinaten

Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten:

$\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\quad \boxed{x = r\bullet\cos\varphi}$

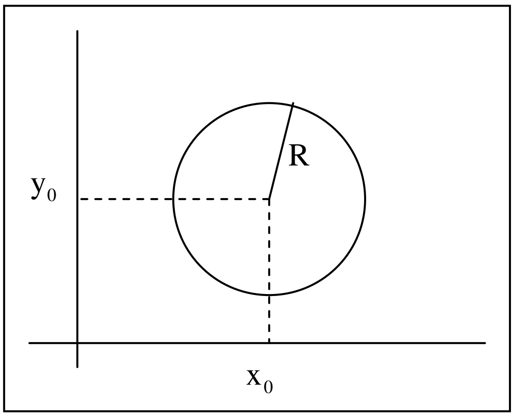
$\sin\varphi = \frac{y}{r}$, $\quad \boxed{y = r\bullet\sin\varphi}$

$$x^2 + y^2 = r^2\left(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1}\right) = r^2 \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y}{x} \quad => \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x},\ \text{falls } x > 0}$$

6. Beispiele zur Beschreibung von Flächenstücken durch Polarkoordinaten

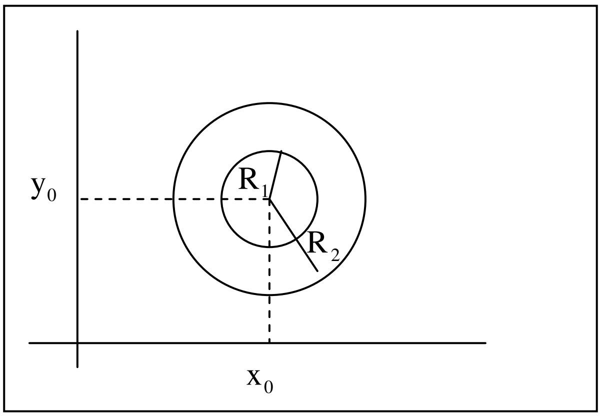
a) Kreis um (x_0, y_0) mit Radius R



$$F = \{(x,y) | x = x_0 + r\cos\varphi,\ y = x_0 + r\sin\varphi,\ 0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2R\}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{in kartesischen Koordinaten} \\ F = \left\{(x,y) \middle| x \in [-R.R],\ y \in [.\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}\right\}\end{array}\right)$$

b) Kreisring um (x_0, y_0) mit dem Radius R_1 und R_2 $\quad R_1 < R_2$



$$F = \{(x,y) | x = x_0 + r\cos\varphi, y = x_0 + r\sin\varphi,\ R_1 \le r \le R_2,\ \varphi \in [0, r\pi]\}$$

c) Oberer Halbkreis um $\left(x_0, y_0\right)$ mit Radius R.

$$F = \left\{ \left(x, y\right) \middle| x = x_0 + r\cos\varphi,\; y = x_0 + \sin\varphi,\; 0 \le r \le R,\; 0 \le \varphi \le \pi \right\}$$

Flächenintegral in Polarkoordinaten:

$$\int_F f\left(x, y\right) dF \qquad = \qquad \int_F f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) \boxed{\underline{\underline{r}}\, dr\, d\varphi}$$

Beschreibung von f in kartesischen Koordinaten	Beschreibung von f in Polarkoordinaten

Kart. Koordinaten: $dF = dx\,dy \left(\text{oder } dF = dy\,dx\right)$

Polarkoordinaten: $dF = r\,dr\,d\varphi$ $\left(\text{oder } dF = r\,d\varphi\,dr\right)$

dx dy	$dF = dx \bullet dy$
Zeichnung	$dF \approx r \bullet d\varphi \bullet dr$

Transformationsformel auf Polarkoordinaten

$$\int\int f\left(x, y\right) \underbrace{dx\,dy}_{dy\,dx} = \int\int f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right) \underbrace{r\,dr\,d\varphi}_{r\,d\varphi\,dr}$$

Grenzen bzgl katr. Koordinaten

Grenzen bzgl Polaroordinaten r und φ

7. Beispiel:

a) F sei die Kreisscheibe mir Radius R. Gesucht ist der Flächeninhalt von F. in kart. Koordinaten:

$$F = \left\{ (x,y) \middle| x^2 + y^2 \le R^2 \right\}$$
$$= \left\{ (x,y),\ x \in [-R,R],\ y \in [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}] \right\}$$

Der Flächeninhalt ist dann:

$$A = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1\, dy\, dx.....$$

<u>in Polarkoordinaten:</u>

$$F = \left\{ (r,\varphi) \middle| \underset{(r\in[0,R])}{0 \le r \le R},\ \underset{\varphi\in[0,2\pi]}{0 \le \varphi \le 2\pi} \right\}$$

$$A = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r\, dr \right) d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 \Big|_{r=0}^{r=R} \right) d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2 d\varphi$$
$$= 2\pi \bullet \frac{1}{2} R^2$$
$$= \pi R^2$$

b) F sei die Einheitskreisscheibe,

$$F = \left\{ (x,y) \middle| x^2 + y^2 \le 1 \right\}$$

gesucht ist

$$\int_F \left(e^{x^2+y^2} \right) dF$$

in kart. Koordinaten:

$$\int_F e^{x^2+y^2} dF = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy\, dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2} \bullet e^{y^2} dy\, dx$$
$$= \int_{-1}^{1} e^{x^2} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} e^{y^2} dy \right) dx$$

Stammfunktion zu e^{y^2} nicht darstellbar, Rechnung hier zuende!!!

<u>in Polarkoordinaten:</u>

$$\int_F e^{x^2+y^2} dF = \int_0^1 \int_0^1 e^{x^2+y^2} \Big|_{\substack{x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi}} r\,dr\,d\varphi$$

$$\left[e^{x^2+y^2} = e^{r^2\left(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1}\right)} = e^{r^2} \right]$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 re^{r^2}\,dr\,d\varphi$$

$$\left[\left(e^{r^2}\right)' = 2re^{r^2}, \left(\frac{1}{2}e^{r^2}\right)' = re^{r^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(e^{r^2} \Big|_{r=0}^{r=1} \right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}(e-1) \bullet 2\pi$$

$$= \pi(e-1)$$

c) Ist in b) $F = \left\{ (x,y) \middle| x^2+y^2 \le R^2 \right\}$
so ist analog

$$\int_{F_R} e^{x^2+y^2} dF = \pi\left(e^{R^2}-1\right)$$

d) Ersetzt man $e^{x^2+y^2}$ durch $e^{-\left(x^2+y^2\right)}$, so ist:

$$\int_{F_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dF = \pi\left(1-e^{-R^2}\right)$$

also

$$\lim_{R\to\infty} \int_{F_R} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dF = \pi$$

e) Nicht immer ist von vornherein klar, ob die Rechnung in kart. oder in Polarkoordinaten einfacher ist.

Berechne $\int_F xy\,dF$, wobei F der obere Halbkreis um 0 mit Radius R=1 ist.

kart. Koordinaten:

$$F = \left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\right\}$$
$$= \left\{(x,y) \middle| x \in [-1,1], y \in [0, \sqrt{1-x^2}]\right\}$$

$$\int_F xy\, dF = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\, dy \right) dx$$
$$= \int_{-1}^{1} x \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\, dy \right) dx$$
$$= \int_{-1}^{1} x \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} xy^2 \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x\left(1-x^2\right) dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(x - x^3\right) dx$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_{-1}^{1}$$
$$= 0$$

in Polarkoordinaten:

$$F = \{(r,\varphi) \mid r \in [0,1], \varphi \in [0,\pi]\}$$

$$\begin{aligned}
\int_F xy\,dF &= \int_0^\pi \int_0^1 r\cos\varphi \bullet r\sin\varphi\, r\,dr\,d\varphi \\
&= \int_0^\pi \int_0^1 r^3 \bullet \sin\varphi\cos\varphi\ dr\,d\varphi \\
&= \int_0^\pi \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi \bullet \underbrace{\int_0^1 r^3\,dr}_{=\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{4}\bullet\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2\varphi\,d\varphi
\end{aligned}$$

$$\left[\sin 2\varphi = \sin(\varphi+\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^R \\
&= -\frac{1}{16}\left(\underbrace{\cos 2\pi}_{=1} - \underbrace{\cos 0}_{=1}\right) \\
&= -\frac{1}{16}\bullet 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Für die Rechnung von Volumenintegralen

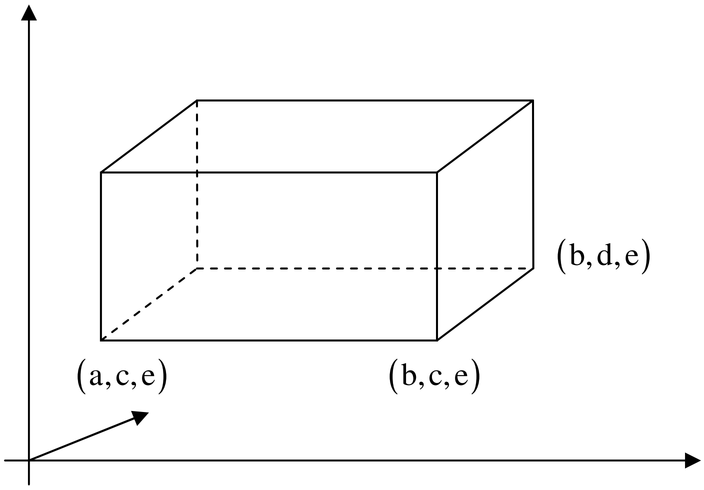
$$\int_V f(x,y,z)\,dV$$

gelten ganz ähnliche Verfahren.

a) Die Laufbereiche der Variablen sind voneinander unabhängige Intervalle

$$x \in [a,b],\ \ y \in [c,d],\ \ z \in [e,f]$$

V sei ein Quader



Dann ist

$$\int_V f(x,y,z)\,dV := \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)\,dx \right) dy \right) dz$$

(oder eine andere Reihenfolge!)

b) Für eine Variable gibt es einen festen Laufbereich:

z.B. $x \in [a,b]$,

die übrigen Variablen hängen jeweils von den vorhergehenden a:

z.B. $y = [g(x), h(x)]$
$z = [k(x,y), l(x,y)]$

c) zwei Variablen haben einen festen Laufbereich, die dritte hängt von denen jeweiligen Wert ab:

8. Beispiele:

a) Beschreibung der Kugel um den Nullpunkt mit Radius R (durch kart. Koordinaten)

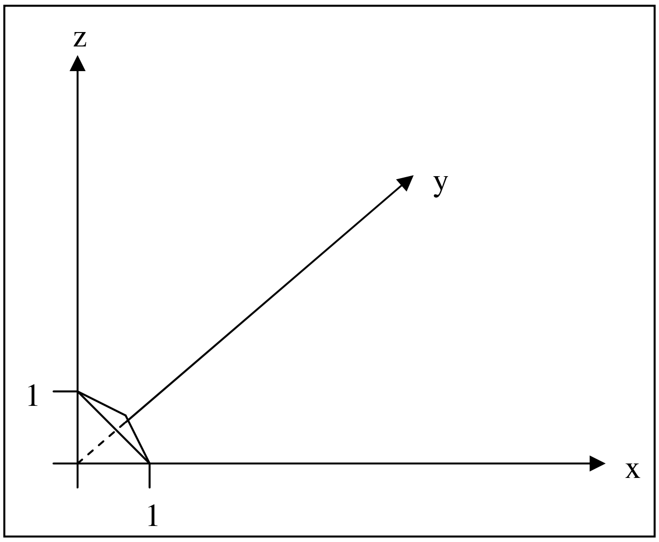
$$V = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$$
$$= \left\{(x,y,z) \,\middle|\, x \in [-R,R],\, y \in \left[-\sqrt{R^2-x^2}, \sqrt{R^2-x^2}\right],\, z \in \left[-\sqrt{R^2-x^2-y^2}, \sqrt{R^2-x^2-y^2}\right]\right\}$$

$$\begin{pmatrix} x^2 \le R^2 \\ x^2 + y^2 \le R^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 \le R^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_F f(x,y,z)\,dV = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

b)

$$V = \{(x,y,z) \mid x,y,z \ge 0,\; x + y + z \le 1\}$$

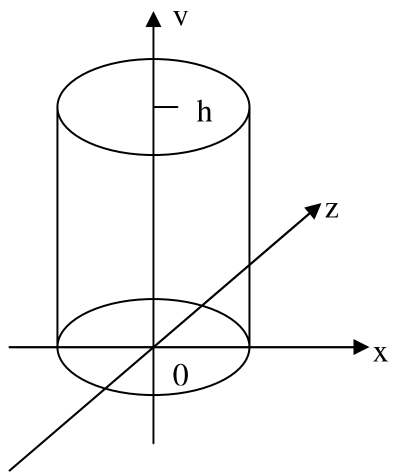


$$V = \{(x,y,z) \mid x \in [0,1],\, y \in [0,1-x],\, z \in [0,1-x-y]\}$$

$$\int_V f(x,y,z)\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

c) V sei der Kreiszylinder mit Radius Rund Höhe h.

$$V = \left\{ (x, y, z) \middle| x \in [-R, R], y \in [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}], z \in [0, h] \right\}$$



$$\int_V f(x,y,z)\,dV = \int_0^h \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$$
$$= \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(\int_0^h f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

8b)

$$V = \left\{ (x, y, z) \middle| x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1 \right\}$$
$$= \left\{ (x, y, z) \middle| x \in [0,1], y \in [0,1-x], z \in [0,1-x-y] \right\}$$

9. Beispiel

Volumen der Dreieckspyramide as 8b)

$$\int_V 1\,dV = \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y} 1\,dz\right)dy\right)dx$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x}\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right)dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1\left(y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx$$

$$= \int_0^1\left[(1-x)-x(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)^2\right]dx$$

$$= -\frac{1}{2}(1-x)^2-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{3}(1-x)^3\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$

Wenn man analog das Volumen der Kugel mit Radius R berechnen will (vgl. 8a), kommt man auf das Integral:

$$\int_V 1\,dV = \int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1\,dz\,dy\,dx$$

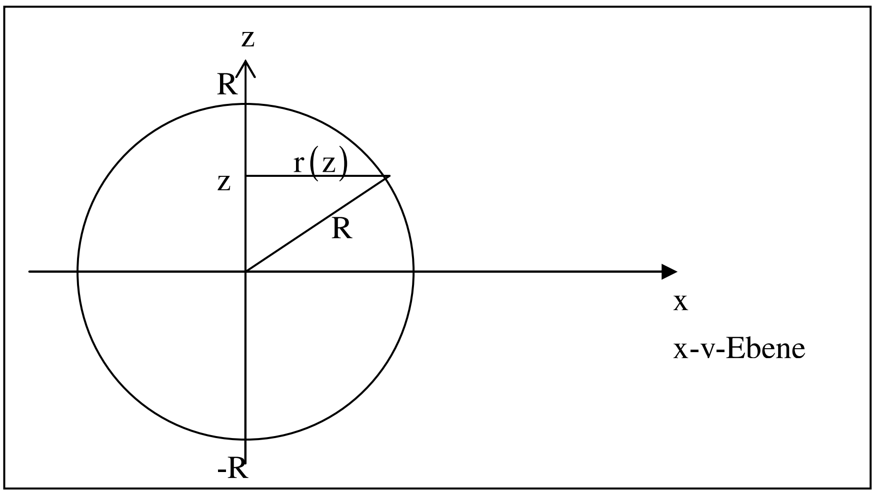
In diesem Beispiel ist der Schnitt durch den Körper (parallel zur x-y-Ebene) in der Höhe z ein Kreis. Für solche Fälle bietet sich die Verwendung so genannter „Zylinderkoordinaten" an:

$$(x,y,z)=(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

d.h. Polarkoordinaten in der x-y-Ebene und z als kart. Koordinate.

z.B.:

Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius R



$z\in[-R,R]$

$r=r(z)=\sqrt{R^2-z^2}$

$\varphi\in[0,2\pi]$

Transformationsformel auf Zylinderkoordinaten:

$$\int_V f(x,y,z) \underset{(dx\,dy\,dz)}{dV} = \int\int\int f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, r)\, r\, dr\, d\varphi\, dz$$

Laufbereiche der Koordinaten r, φ und z

10. Beispiele

Volumen der Kugel mit Radius R um $(0,0,0)$

Laufbereiche der Variablen:

$$z \in [-R, R]$$
$$\varphi \in [0, 2\pi]$$
$$r \in [0, \sqrt{R^2 - z^2}]$$

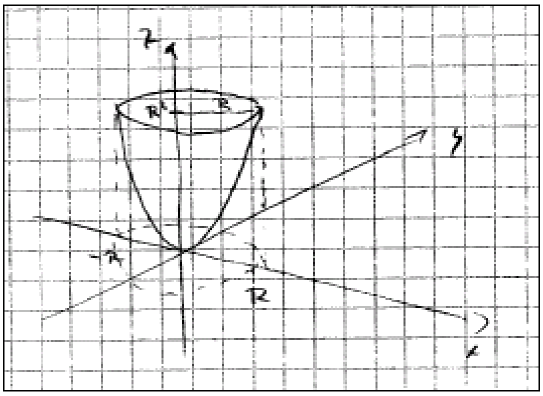
$$\begin{aligned}
\int_V 1\, dV &= \int_{-R}^{R} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} 1\, r\, dr\, d\varphi\, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_{-R}^{R} \int_0^{2\pi} r^2 \Big|_0^{\sqrt{R^2-z^2}} d\varphi\, dz \\
&= \frac{1}{2} \int_{-R}^{R} \int_0^{2\pi} \left(R^2 - z^2\right) d\varphi\, dz \\
&= \frac{2\pi}{2} \left(R^2 z - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} \\
&= \pi \left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right)\right] \\
&= \pi \left(2R^3 - \frac{2R^3}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3} \pi R^3
\end{aligned}$$

Als weiteres Koordinatensystem im $\mathbb{R}^3$ gibt es die so genannten „Kugelkoordinaten“ (vgl. Literatur, z.B. Papula)

Zusammenhang zwischen der Volumenberechnung von Rotationskörpern und Volumenberechnung mittels Zylinderkoordinaten :

11. Beispiel

Es sei $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ und $V = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le R^2, f(x,y) \le z \le R^2\}$



Der Schnitt durch V in Höhe z ist ein Kreis um 0 mit Radius $\sqrt{z}$, d.h. die Laufbereiche der Variablen sind:

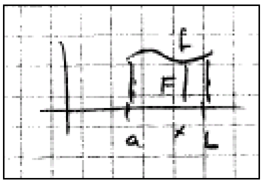
$$0 \le z \le R^2$$
$$0 \le r \le \sqrt{z}$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

Das Volumen des Körpers ist also gegeben durch:

$$\int_V 1\,dV = \int_0^{R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}} 1\,r\,dr\,d\varphi\,dz$$
$$= \frac{2\pi}{2}\int_0^{R^2} r^2\Big|_0^{\sqrt{z}}\,dz$$
$$= \pi\,\frac{z^2}{2}\Big|_0^{R^2}$$
$$= \frac{1}{2}\pi R^4$$

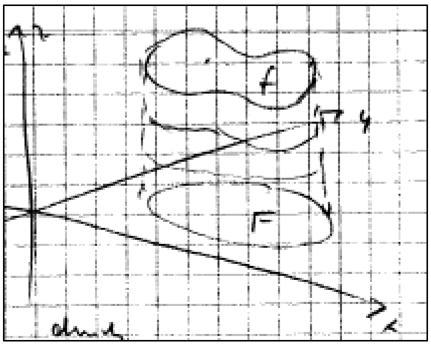
Ist $f(x) \ge 0$ für alle $x \in [a,b]$, so ist der Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Intervall [a,b] und dem Graphen der Funktion gegeben durch :

$$\int_a^b\int_0^{f(x)} 1\,dy\,dx$$
$$= \int_a^b y\Big|_0^{f(x)}\,dx$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx$$



Analog:

Ist $z = f(x,y) \geq 0$, wobei $(x,y) \in F$ (Flächenstück m $\mathbb{R}^2$), so ist das Volumen des Körpers, der durch F und dem Graphen der Funktion eingeschlossen wird,

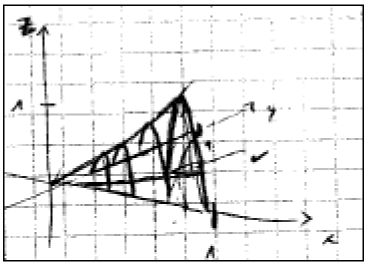


gegeben durch

$$\int_V 1\,dV = \int_F \int_0^{f(x,y)} 1\,dz\,dF$$
$$= \int_F f(x,y)\,dF$$

12. Beispiel

$F = [0,1] \times [0,1], z = f(x,y) = xy$



$$\int_V 1\,dV = \int_F dx\,dF$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 xy\,dx\,dy$$
$$= \int_0^1 y\,dy \bullet \int_0^1 x\,dx$$
$$= \left(\int_0^1 x\,dx \right)^2$$
$$= \left(\frac{1}{2} \right)^2$$
$$= \frac{1}{4}$$